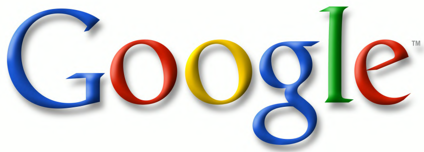

Google


NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633338 0





Handbuch
der
Statik fester Körper.

Mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von

J. A. Eytelwein,
Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe; Director der Königl. Bau-Akademie; der Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Künste und deren Senats zu Berlin, der batavischen Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurth an der Oder, der Ostpreuß. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, der ökonomischen Societät zu Leipzig, und der märkischen ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam Mitgliede.

Dritter Band,
welcher als Anhang zur Statik, die Theorie einiger transcendenten krummen Linien enthält.

Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realschulbuchhandlung.

Theorie

derjenigen

transscendenten krummen Linien,

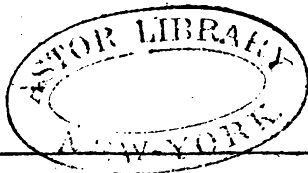
welche vorzüglich

bei statischen Untersuchungen

vorkommen.

Von

J. A. Eytelwein.



Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1808.

In der Realschulbuchhandlung.



Handbuch
der
Statik fester Körper.

Mit
vorzüglicher Rücksicht
auf
ihre Anwendung in der Architektur.

Aufgesetzt
von

J. A. Eytelwein,

Königl. Preuß. geheimen Oberbaurathe; Director der Königl. Bau-Akademie; der Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Künste und deren Senats zu Berlin, der batavischen Gesellschaft der Experimental-Philosophie zu Rotterdam, der Gesellschaft der Wissenschaften und Künste zu Frankfurth an der Oder, der Ostpreuß. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft, der ökonomischen Societät zu Leipzig, und der märkischen ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam Mitgliede.

Dritter Band,

welcher als Anhang zur Statik, die Theorie einiger transcendenten krummen Linien enthält.

Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realschulbuchhandlung.

Theorie

derjenigen

transcendenten krummen Linien,

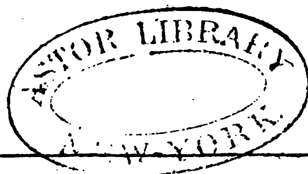
welche vorzüglich

bei statischen Untersuchungen

vorkommen.

Von

J. A. Eytelwein.



Mit fünf Kupfertafeln.

Berlin, 1808.
In der Realschulbuchhandlung.

Inhalt.

IV. Abschnitt. Von der logarithmischen Linie.

V. Abschnitt. Von den Spirallinien.

(I) Von der linearen oder archimedischen Spirallinie.

(II) Von der parabolischen Spirallinie.

Nachtrag,

welcher einige Näherungsausdrücke für trigonometrische Linien enthält.

Erster Abschnitt.

Von der Cykloide oder Radlinie.

§. 1.

Auf einer graden Linie AD, Figur 1., welche hier die Grundlinie oder Basis heißt, befinde sich ein Kreis AMBA, welcher in A die Grundlinie berührt, und in einerlei Ebene auf der Grundlinie von A nach D gewälzt werde. Kommt der Kreis AB in die Lage M′N, und berührt die Grundlinie in M′, so muß nach dem Begriffe der Wälzung, wenn der Punkt M des Kreises AB in M′ angelangt ist, der Bogen AM der Linie AM′ gleich seyn. Nimmt man daher den Bogen M′A′ = AM′, so ist A′ der Ort, wo sich der Punkt A befindet, wenn der Kreis AB von A bis M′ gewälzt wird. Taf. I. Fig. 1.

Bei der Wälzung des Kreises AB wird der Punkt A, bis er nach A′ kommt, irgend eine krumme Linie AA′ beschreiben, welche man die gemeine Cykloide oder Radlinie (Trochoides. *Cycloïde. Roulette*) nennt, weil ein Punkt in dem Umfange eines fortgewälzten Rades eine ähnliche Linie beschriebe. Der wälzende Kreis AB heißt der Erzeugungskreis (Circulus generator. *Cercle générateur*), und der Punkt A desselben, welcher die Cykloide beschreibt, der beschreibende Punkt.

Kommt der Erzeugungskreis bis C, und es ist AC dem halben Umfange AMB des erzeugenden Kreises gleich, so fällt der beschreibende Punkt in die auf AD senkrechte Linie CS in S, wenn CS dem Durchmesser AB gleich ist. Wird der erzeugende Kreis noch weiter fortbewegt, so wird der beschreibende Punkt in D wieder in die Grundlinie fallen, wenn $CD = AC$, oder wenn AD dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich ist. Dieser hat alsdann eine Umdrehung gemacht, und eine Cykloide ASD beschrieben; auch läßt sich einsehn, daß bei fortgesetzter Wälzung mehrere Cykloiden beschrieben werden können, welche einander gleich und ähnlich sind.

Der Punkt S heißt der Scheitel, und A soll hier der Anfang der Cykloide heißen.

Zum Bogen $AM =$ Bogen $M'A'$, welcher von A bis M abgewälzt ist, gehört am Mittelpunkte G' der Winkel $A'G'M'$, welcher der **Wälzungswinkel** genannt wird. Setzt man denselben $= \varphi$, und bezeichnet zugleich dadurch denjenigen Bogen, welcher für den Halbmesser $= 1$ diesem Winkel entspricht, so ist für $A'G' = r$, der abgewälzte Bogen $A'M'$ oder die Linie

$$AM' = r\varphi.$$

Fällt der beschreibende Punkt A' in den Scheitel S, so wird $\varphi = \pi = 3,14159\ldots$, daher

$$AC = \pi r.$$

§. 2.

Taf. I. Fig. 1. Aufgabe. Durch den Anfang A, Figur 1., der Cykloide ist auf die Grundlinie AD der Durchmesser AB des erzeugenden Kreises AMB senkrecht gestellt. Für ir-

gend einen Punkt P auf diesem Durchmesser sucht man den Abstand P A' eines Punkts A' in der Cykloide.

Auflösung. Durch P sei PP' unbestimmt lang auf AB senkrecht gezogen, und der erzeugende Kreis werde in M geschnitten. Man mache AM' dem Bogen AM gleich, ziehe M'P' auf AD senkrecht, nehme $P'A' = PM$, so ist A' der gesuchte Punkt. Hievon kann man sich leicht überzeugen, wenn über M' ein erzeugender Kreis M'N beschrieben wird, weil derselbe alsdann deshalb durch den Punkt A' gehen muß, weil $M'P' = AP$ und $P'A' = PM$ ist. Nun war $AM' =$ Bogen AM, also ist auch $M'A' = AM'$, folglich nach dem vorigen §. A' ein Punkt in der Cykloide.

Will man aus der Entfernung $AP = x$ den Abstand $PA' = y$ finden, so sei der Halbmesser des erzeugenden Kreises $AG = GB = r$, alsdann ist $AP = x$, der Sinusversus, welcher zum Bogen AM gehört, also

Bogen $AM = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r} = AM' = PP'$.

Nach der Eigenschaft des Kreises ist ferner

$PM^2 = BP \cdot PA = 2rx - x^2$, also

PM oder $P'A' = \sqrt{(2rx - x^2)}$. Aber

$y = PA' = PP' - P'A'$, daher

$$\text{(I)}\quad y = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r} - \sqrt{(2rx - x^2)}$$

Soll x und y durch den Wälzungswinkel $A'G'M' = AGM = \varphi$ ausgedrückt werden, so erhält man, weil der Winkel $MGP = 180° - \varphi$, also $\cos MGP = -\cos \varphi$ ist,

$GP = GM \cdot \cos MGP = -r \cos \varphi$, also

$x = AP = AG + GP = r - r \cos \varphi$, oder

telpunktswinkel A′G′M′ gleich ist. Wenn daher M′A′N der erzeugende Kreis ist, welcher zum beschreibenden Punkte A′ gehört, so findet man die Lage der Tangente für A′, wenn man von A′ nach dem Endpunkte N des Durchmessers M′N die Sehne A′N zieht.

Weil die Normale auf der Tangente senkrecht steht, so findet man diese, wenn von A′ nach dem Berührungspunkte M′ die Sehne A′M′ gezogen wird, weil nur in diesem Falle N A′M′ ein rechter Winkel ist.

Im Scheitel S läuft die Tangente mit der Grundlinie AD parallel, und im Anfangspunkte A steht sie darauf senkrecht.

§. 6.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der Cykloide zu finden.

Auflösung. Weil nach §. 2. II. IV.

$\partial x = r\partial\varphi . \sin\varphi$ und $\partial y = r\partial\varphi . (1 - \cos\varphi)$ ist,

Taf. I. Fig. 1. so erhält man, wenn, Figur 1., der Bogen $AA' = v$ gesetzt wird,

$$\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = 4r^2\partial\varphi^2 \frac{1-\cos\varphi}{2} = 4r^2\partial\varphi^2 . \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

oder

$$\partial v = 2r\partial\varphi . \sin\tfrac{1}{2}\varphi, \text{ daher}$$

$$v = 4r\int\tfrac{1}{2}\partial\varphi . \sin\tfrac{1}{2}\varphi = -4r\cos\tfrac{1}{2}\varphi + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird $\cos\frac{1}{2}\varphi = 1$ und $v = 0$, also $\text{Const.} = 4r$, daher findet man die Länge des Bogens AA' oder

$$(I)\ v = 4r(1 - \cos\tfrac{1}{2}\varphi).$$

Für die halbe Cykloide ist $\varphi = 180°$, also $\cos\frac{1}{2}\varphi = 0$, daher $v = 4r$, d. h. die halbe

Cykloide

Cykloide ist dem doppelten Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich.

Will man den Bogen v durch die Abscisse x ausdrükken, so ist §. 2. (III) $x = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = 2r(1 - \cos\frac{1}{2}\varphi^2)$, also $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{2r - x}{2r}}$, folglich wenn dieser Werth in (I) gesetzt wird

$$\text{(II)}\quad v = 4r - 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)}.$$

Rechnet man die Länge des Bogens vom Scheitel S, und setzt $SA' = v'$, und die dazu gehörige Abscisse $SX = x'$, so ist $x = 2r - x'$, und $v' = 4r - v = 2\sqrt{(4r^2 - 2rx)}$, oder man findet, wenn $2r - x'$ statt x gesetzt wird, die Länge des Bogens SA', oder

$$\text{(III)}\quad v' = 2\sqrt{2rx'}.$$

Ferner ist nach den Eigenschaften der Figur $(NA')^2 = NP'.NM' = 2rx'$, also $NA' = \sqrt{2rx'}$, folglich

$$\text{(IV)}\quad v' = 2 . NA'$$

oder die doppelte Sehne NA' ist eben so groß als der Bogen SA' von der Cykloide.

§. 7.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser ϱ für irgend einen Punkt A', Figur 1., der Cykloide zu bestimmen. Taf. I. Fig. 1.

Auflösung. Nach §. 5. ist

$\partial x = r\partial\varphi \sin\varphi$; $\partial y = r\partial\varphi(1 - \cos\varphi)$ und $\partial v = 2r\partial\varphi \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher, wenn man $\partial\varphi$ constant annimmt:

$\partial^2 x = r\partial\varphi^2 \cos\varphi$ und $\partial^2 y = r\partial\varphi^2 \sin\varphi$.

Hieraus findet man

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = -r^2 \partial \varphi^3 (1 - \cos\varphi) = -2r^2 \partial \varphi^3 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Nun ist allgemein der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}, \text{ daher}$$

$$\varrho = \frac{8 r^3 \partial \varphi^3 \sin\frac{1}{2}\varphi^3}{-2r^2 \partial \varphi^3 \sin\frac{1}{2}\varphi^2} = -4r \sin\tfrac{1}{2}\varphi,$$

oder es ist, weil sich das Minuszeichen hier auf die Lage des Halbmessers bezieht, und anzeigt, daß solcher nach der Richtung $A'M'$ genommen werden muß,

$$\varrho = 4r \sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Im rechtwinklichten Dreiecke $A'NM'$ ist aber $A'M' = M'N \sin A'NM$ oder $A'M' = 2r \sin\frac{1}{2}\varphi$, daher erhält man

$$\varrho = 2A'M' = 2AM.$$

Der Krümmungshalbmesser ist folglich doppelt so groß, als die Sehne $A'M'$ im Erzeugungskreise.

Im Scheitel ist der Krümmungshalbmesser dem doppelten Durchmesser des Erzeugungskreises gleich, und beim Anfange $A = 0$.

§. 8.

Aufgabe. Den Flächeninhalt des von der Cykloide und ihrer Grundlinie eingeschlossenen Raumes zu finden.

Taf. I. Fig. 1. Auflösung. Man ziehe, Figur 1., von irgend einem Punkte A' der Cykloide die Linie $A'Q$ auf AD senkrecht, so ist $AQ = PA' = y$, $QA' = AP = x$, und, wenn man die Fläche $AQA'A = F$ setzt, $\partial F = x \partial y = r(1 - \cos\varphi)\, r(\partial\varphi - \partial\varphi \cos\varphi)$ §. 2. II. IV. oder

$$\partial F = r^2 \partial\varphi (1 - 2\cos\varphi + \cos\varphi^2)$$
$$= r^2 \partial\varphi (\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi)$$

weil $\cos\varphi^2 = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$ ist. Hieraus erhält man

$$F = r^2 \int \partial\varphi \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi\right)$$
$$= r^2 \left(\tfrac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\right),$$

wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral mit $\varphi = 0$ verschwindet. Es ist daher die Fläche $AA'Q$, oder

$$F = \tfrac{1}{4}r^2(6\varphi - 8\sin\varphi + \sin 2\varphi).$$

Für die ganze Cykloide ASD wird der Winkel $\varphi = 360°$, also $\sin\varphi$ und $\sin 2\varphi = 0$, aber Bogen $\varphi = 2\pi$, daher ist die Fläche

$$ASDA = 3\pi r^2.$$

Die ganze von der Cykloide und der Grundlinie eingeschlossene Fläche ist daher dreimal so groß als der Inhalt des Erzeugungskreises.

§. 9.

Rechnet man die Abscissen vom Scheitel S, Figur 1., und sucht den Inhalt des Abschnitts $A'SXA' = F'$ für $SX = x'$ und $XA' = y'$, so erhält man aus §. 3. (III) Taf. I. Fig. 1.

$\partial y' = r\partial \text{ Arc sinvers } \frac{x'}{r} + \frac{(r - x')\,\partial x'}{\sqrt{(2rx' - x'x')}}$. Aber (P. A. S. 79. 3 Z.)

$\partial \text{ Arc sinvers } \frac{x'}{r} = \frac{\partial x'}{\sqrt{(2rx' - x'x')}}$, daher

$$\partial y' = \frac{(2r - x')\,\partial x'}{\sqrt{(2rx' - x'x')}}, \text{ oder}$$

$$x'\partial y' = \frac{(2rx' - x'x')\,\partial x'}{\sqrt{(2rx' - x'x')}} = \partial x'\sqrt{(2rx' - x'x')}.$$

Nun ist (P. A. S. 161. X.)

$$\int \partial x' \sqrt{(2rx' - x'x')}$$
$$= \tfrac{1}{2}(x'-r)\sqrt{(2rx'-x'x')} + \tfrac{1}{2}r^2 \text{Arc tgt.} \frac{x'-r}{\sqrt{(2rx'-x'x')}} + \text{Const}$$
$$= -\tfrac{1}{2}(r-x')\sqrt{(2rx'-x'x')} + \tfrac{1}{2}r^2 \text{Arc sinvs} \frac{x'}{r} + \text{Const} \ (*)$$

(*) Denn man setze $\text{Arc tgt} \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \varphi$, so ist $\text{tgt}\,\varphi = \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, oder $-\text{tgt}\,\varphi = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$.

Aber $\text{tgt}\,(\pi - \varphi) = -\text{tgt}\,\varphi = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, also $\pi - \varphi = \text{Arc tgt} \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$, daher

$\varphi = \pi - \text{Arc tgt} \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \text{Arc tgt} \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$

Ferner setze man $\text{Arc tgt} \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = \psi$, so ist $\text{tgt}\,\psi = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$. Da nun

$\sin\psi = \frac{\text{tgt}\,\psi}{\sqrt{(1 + \text{tgt}\,\psi^2)}} = \frac{r - x}{r} = 1 - \frac{x}{r}$ ist, so wird $\frac{x}{r} = 1 - \sin\psi = \cos\text{vers}\,\psi = \text{sinvers}\,(\tfrac{1}{2}\pi - \psi)$, also $\text{Arc sinvers} \frac{x}{r} = \tfrac{1}{2}\pi - \psi$, oder

$\psi = \tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc sinvers} \frac{x}{r}$. Aber $\varphi = \pi - \psi$, daher $\varphi = \tfrac{1}{2}\pi + \text{Arc sinvers} \frac{x}{r} = \text{Arc tgt} \frac{x - r}{\sqrt{(2rx - x^2)}}$

Mittelst dieses Werths wird der oben stehende Ausdruck erhalten, wenn man die beständige Größe $\tfrac{1}{2}\pi$ mit unter der Const. begreift. Auf einem directen Wege kann dies Integral leichter gefunden werden. Hier war nur zu zeigen, daß beide Ausdrücke gleichgeltend sind.

und wenn für $x' = 0$ das Integral verschwindet, Const $= 0$, daher

$$\int \partial x' \sqrt{(2rx' - x'x')}$$
$$= \tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc sinvs } \frac{x'}{r} - \tfrac{1}{2}(r - x') \sqrt{(2rx' - x'x')},$$

Das Element der Fläche ist

$$\partial F = y'\partial x' = \partial(x'y') - x'\partial y', \text{ daher}$$
$$F = x'y' - \int x'\partial y' = x'y' - \int \partial x' \sqrt{(2rx' - x'x')}$$

oder

$$F = x'y' - \tfrac{1}{2} r^2 \text{ Arc sinvs } \frac{x'}{r} + \tfrac{1}{2}(r - x') \sqrt{(2rx' - x'x')}$$

oder man findet, wenn man statt y' seinen Werth (§. 3. III.) setzt, den halben Abschnitt der Cykloide, vom Scheitel an gerechnet

$$F = r(x' - \tfrac{1}{2} r) \text{ Arc sinvs } \frac{x'}{r} + \tfrac{1}{2}(x' + r) \sqrt{(2rx' - x'x')}$$

oder auch

$$F = (r - \tfrac{1}{2} x') \sqrt{(2rx' - x'x')} + (x' - \tfrac{1}{2} r) y'.$$

§. 10.

Der beschreibende Punkt ist bisher im Erzeugungskreise angenommen worden; allein man kann denselben auch außerhalb des Erzeugungskreises, etwa in O, Figur 2., annehmen, und dabei voraussetzen, daß sich der beschreibende Punkt O mit dem wälzenden oder erzeugenden Kreise zugleich bewegt, so wird derselbe bei der Fortwälzung des Kreises AB auf der Grundlinie AD, eine verkürzte (curtata) oder verschlungene Cykloide $O\alpha'\beta'f'$ beschreiben. Taf. I. Fig. 2.

Ganz auf eine ähnliche Art lassen sich die Eigenschaften der verkürzten Cykloide wie bei der gemeinen bisher abgehandelten entwickeln. Wird aus dem Mittelpunkte des

Erzeugungskreises durch den beschreibenden Punkt O ein Kreis OγVO geschlagen, so heißt dieser der beschreibende Kreis, und in Beziehung auf denselben läßt sich eben so jeder Punkt in der verkürzten Cykloide finden, wie dies von der gemeinen in Beziehung auf den Erzeugungskreis §. 2. erwiesen ist.

Hierauf gründet sich das Verfahren, die verkürzte Cykloide zu zeichnen. Es sei AB der erzeugende und OV der beschreibende Kreis. Man ziehe O6 mit der Grundlinie AD parallel, nehme O6 so groß wie den halben Umfang des Erzeugungskreises AB; theile den halben Umfang des beschreibenden Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile Oα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\varepsilon$, εV, und in eben so viel gleiche Theile O, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5; 5, 6 theile man die Linie O6. Durch die Theilungspunkte α, β, γ, δ, ε ziehe man mit O6 die Parallelen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, cc$'$, dd$'$, ee$'$, Vf$'$, und darauf senkrecht die Linien 1a$'$, 2b$'$, 3c$'$, 4d$'$, 5e$'$, 6f$'$, nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$ u. s. w., so sind O, α', β', γ', δ', ε', f$'$ Punkte in der Cykloide, durch welche man solche beschreiben kann.

§. 11.

Die Gleichung für die verkürzte Cykloide wird auf ähnliche Art wie §. 2. für die gemeine gefunden. Mit
Taf. I. Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung sei, Figur 3.,
Fig. 3. $GA = GB = GM = r$ der Halbmesser des Erzeugungskreises, $Ga = Gb = Gm = r'$ der Halbmesser des beschreibenden Kreises, und der Mittelpunkt G sei bis G$'$ fortgerückt, so ist, wenn a als Anfangspunkt der

Abscissen angenommen wird, für $aP = x$ die Ordinate $Pa' = y$, und der

$$\text{Bogen } AM = AM' = PP' = r\varphi. \text{ Ferner}$$

$$\text{Bogen } am = r' \text{Arc sinvers } \frac{x}{r'}, \text{ daher}$$

$$\text{Bogen } AM = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r'} = PP'$$

$$Pm^2 = bP \,.\, Pa = (2r' - x)x, \text{ also}$$

$$Pm = P'a' = \sqrt{(2r'x - x^2)}$$

$$y = Pa' = PP' - P'a', \text{ folglich}$$

$$(\text{I})\; y = r \text{ Arc sinvers } \frac{x}{r'} - \sqrt{(2r'x - x^2)}$$

Ferner ist $GP = - r' \cos\varphi$,

$$x = aP = aG + GP, \text{ folglich}$$

$$(\text{II})\; x = r'(1 - \cos\varphi) = 2r' \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Endlich erhält man noch

$$y = Pa' = PP' - P'a', \text{ daher}$$

$$(\text{III})\; y = r\varphi - r' \sin\varphi.$$

Wird $y = 0$, so muß die krumme Linie die Axe ab schneiden. Dies erfolgt, wenn nach III.

$$r\varphi = r' \sin\varphi$$

ist. Nun wird für $\varphi = 0$ auch $\sin\varphi = 0$, daher schneidet die Kurve die Axe im Anfangspunkte a. Wäre F der zweite Durchschnittspunkt, und man zieht FH auf ab senkrecht, und zum Punkte H den Halbmesser GH, so wird der Erzeugungskreis in K geschnitten. Gehört nun zum Bogen AK der Winkel φ, so ist

$$r\varphi = \text{Bogen } AK \text{ und } r' \sin\varphi = HF.$$

Es muß daher im Durchschnittspunkte F der Bogen AK der Sehne FH gleich seyn. Uebrigens ist F für die verkürzte Cykloide ein Doppelpunkt (Punctum duplex).

§. 12.

Taf. I. Fig. 2. Wenn hingegen der beschreibende Punkt O′, Figur 2., innerhalb des Erzeugungskreises DE fällt, so wird bei der Fortwälzung dieses Kreises von D nach A eine gestreckte oder verlängerte Cykloide $O'\beta'c'$ beschrieben. Bei dieser ist der Halbmesser G′O′ des beschreibenden Kreises kleiner als der Halbmesser G′D des Erzeugungskreises.

Die Aufzeichnung der gestreckten Cykloide geschieht nach eben den Grundsätzen, wie bei der verschlungenen oder gemeinen, daher die Zeichnung Figur 2. ohne weitere Erklärung zureichend ist. Noch ist zu bemerken, daß ASD die gemeine Cykloide ist, welche bei einerlei Grundlinie und einerlei Erzeugungskreis sowohl die verschlungene als auch die gestreckte Cykloide schneidet.

Die Gleichungen für die verlängerte Cykloide findet man eben so wie im vorigen §., wenn man den Anfangspunkt der Abscissen im Punkte O′ annimmt, nur daß hier r′ kleiner als r ist.

Um die Wendungspunkte einer krummen Linie zu finden, darf man nur $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ setzen. Nun ist

$\partial x = r' \partial \varphi \sin \varphi$, also

$\partial^2 x = r' \partial \varphi^2 \cos \varphi + r' \partial^2 \varphi \sin \varphi$.

Wird ∂x constant angenommen, so ist $\partial^2 x = 0$, also $r' \partial \varphi^2 \cos \varphi + r' \partial^2 \varphi \sin \varphi = 0$, daher $\partial^2 \varphi = - \partial \varphi^2 \cot \varphi$.

Ferner erhält man

$\partial y = r \partial \varphi - r' \partial \varphi \cos \varphi$, also

$\partial^2 y = r \partial^2 \varphi - r' \partial^2 \varphi \cos \varphi + r' \partial \varphi^2 \sin \varphi$

oder $- \partial \varphi^2 \cot \varphi$ statt $\partial^2 \varphi$ gesetzt, giebt

$$\partial^2 y = (r' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cot \varphi - r \cot \varphi)\, \partial \varphi^2$$

daher

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{r' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cot \varphi - r \cot \varphi}{r' r' \sin \varphi^3}.$$

Für $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ wird

$$r' \sin \varphi + r' \cos \varphi \cot \varphi = r \cot \varphi \text{ oder}$$

$$r \cos \varphi = r' (\sin \varphi^2 + \cos \varphi^2) = r'$$

daher muß, wenn K, Figur 2., der Wendungspunkt ist, für denselben

$$r \cos \varphi = r'$$

seyn. Durch den Anfangspunkt O′ werde O′F auf die Abscissenaxe O′E senkrecht gezogen, und schneide den Erzeugungskreis in F. Man ziehe G′F, wodurch der beschreibende Kreis in H geschnitten wird. Setzt man alsdann, daß der Bogen O′H dem Winkel φ entspricht, so ist $G'O' = r \cos \varphi$; aber auch $G'O' = r'$, also ist H der Punkt im beschreibenden Kreise, welcher mit dem Wendungspunkte zusammengehört. Zieht man daher HK mit O′F parallel, so muß der Wendungspunkt in diese Linie fallen.

Weil $\cos \varphi = \frac{r' - x}{r'}$ ist, (§. 11. II.) so erhält man $r' = r \cos \varphi = \frac{r(r' - x)}{r'}$, und hieraus die Abscisse, welche dem Wendungspunkte entspricht, oder

$$x = \frac{r'(r - r')}{r}$$

auch verhält sich $r' : r = r - r' : x$.

Zweiter Abschnitt.

Von der Epicykloide und Hypocykloide.

I. Die gemeine Epicykloide.

§. 13.

Taf. I. Fig. 4. Auf einem unbeweglichen Kreise AM′A‴, Figur 4., befinde sich in derselben Ebene ein zweiter Kreis AMB, welcher auf AM′A‴ fortgewälzt werde, so wird, wenn AMB in die Lage A′M′L kommt, irgend ein Punkt A im Umfange des Kreises AMB eine krumme Linie AA′ beschreiben, welche man die gemeine **Epicykloide** (*Roulette extérieure*) nennt.

Der unbewegliche oder ruhende Kreis AA‴ heißt der **Grundkreis**, die **Grundlinie** oder **Basis**. Der bewegte Kreis AMB wird der **erzeugende** oder **beschreibende** (Circulus generator. *Cercle générateur*) genannt, und derjenige Punkt A im Umfange des erzeugenden Kreises, welcher die Epicykloide AA′ beschreibt, der **beschreibende Punkt** (*Point décrivant*).

Der beschreibende Punkt falle bei A in den Grundkreis, und der Erzeugungskreis AB werde auf AA‴ bis M′ gewälzt, so muß von dem erzeugenden Kreise, wenn solcher bis M′ kommt, ein Bogen AM = AM′ abgewälzt seyn, und der Punkt M muß alsdann in M′ fallen. Auch wird der beschreibende Punkt A nunmehr in A′ liegen, wenn M′A′ = M′A = AM genommen wird.

Der Winkel $M'G'A'$, welcher am Mittelpunkte G' des erzeugenden Kreises zum abgewälzten Bogen $M'A'$ gehört, heißt der Wälzungswinkel, welcher hier durchgängig $= \varphi$ gesetzt werden soll. Der Winkel ACM' am Grundkreise, dessen Bogen AM' dem Bogen $M'A'$ gleich ist, kann hier der Grundwinkel heißen, und durch φ' ausgedrückt werden. Wird der Wälzungswinkel $\varphi = 180°$, so ist der Bogen AB'' der halben Peripherie des erzeugenden Kreises gleich, und wenn der Bogen $AB''A'''$ des Grundkreises dem ganzen Umfange des erzeugenden Kreises gleich ist, so hat dieser eine Umdrehung gemacht. So oft nun der Umfang des erzeugenden Kreises im Umfange des Grundkreises enthalten ist, so viel Umdrehungen wird der Erzeugungskreis machen, bis er einen Umlauf um den Grundkreis vollendet hat, oder wenn der Halbmesser des Grundkreises $CA = a$ und der Halbmesser des erzeugenden Kreises $= r$ gesetzt wird, so ist $\frac{a}{r}$ die Zahl der Umdrehungen des erzeugenden Kreises, welche auf jeden Umlauf kommen. Ist $\frac{a}{r}$ eine ganze Zahl, so kommt der erzeugende Punkt A jedesmal wieder auf dieselbe Stelle, wo er abgewälzt worden ist; außerdem entstehen aber über dem Grundkreise mehrere Epicykloiden, welche sich durchschneiden.

Werden die Halbmesser a, r durch ganze Zahlen ausgedrückt, welche keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, und man setzt den Umfang des Grundkreises $= A$, des erzeugenden Kreises $= R$, so verhält sich

$$A : R = a : r, \text{ also ist } a \,.\, R = r \,.\, A$$

d. h. a Umfänge des erzeugenden Kreises sind $= r$ Um-

fänge des Grundkreises, oder wenn der Grundkreis sich a mal umdreht, wird er r Umläufe gemacht haben, und nur nach r Umläufen kann der erzeugende Punkt wieder an derselben Stelle des Grundkreises eintreffen.

Sind zwei Bogen verschiedener Kreise gleich lang, so verhalten sich die zugehörigen Mittelpunktswinkel umgekehrt wie die Halbmesser. Nun ist der Bogen $A'M' = AM'$, daher $\varphi : \varphi' = a : r$, man erhält daher aus dem gegebenen Wälzungswinkel φ den Grundwinkel

$$\varphi' = \frac{r}{a} \varphi.$$

§. 14.

Taf. I. Fig. 4. Aufgabe. Die Entfernung eines Punktes N, Figur 4., vom Mittelpunkte C des Grundkreises ist gegeben, man soll einen Punkt A' in der Epicykloide durch Zeichnung finden, welcher eben so weit von C entfernt ist.

Auflösung. Es sei A der Anfangspunkt der Epicykloide, und auf der durch A gezogenen Linie CB die Weite CN gegeben, so daß der Punkt N innerhalb des Durchmessers AB vom erzeugenden Kreise BMA fällt. Durch N beschreibe man mit dem Halbmesser CN den Bogen NMN', nehme $AM' = AM$; ziehe durch M' die Linie CN', und nehme $N'A' = NM$, so ist A' ein Punkt in der Epicykloide, deren Anfangspunkt in A liegt.

Den Grund dieses Verfahrens wird man leicht einsehn, wenn über dem gefundenen Punkt M' der erzeugende Kreis M'A'L beschrieben wird, alsdann ist $M'N' = AN$, also $M'A' = AM$, daher A' der Ort, in welchen der Punkt A gelangen muß, wenn der erzeugende Kreis über M' steht.

§. 15.

Zusatz. Durch die vorstehende Aufgabe erhält man ein leichtes Mittel, für jeden gegebenen Fall eine Epicykloide zu zeichnen, weil man für jeden Abstand vom Mittelpunkte C des Grundkreises, einen Punkt in der Epicykloide angeben kann. Es sei daher AC, Figur 4., der Halbmesser des Grundkreises, und der Bogen A5 auf dem Grundkreise eben so groß, als der halbe Umfang $A\beta B$ des erzeugenden Kreises. Man theile den halben Umfang $A\beta B$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δB, und in eben so viel gleich große Theile A 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5 werde A 5 getheilt. Aus C ziehe man durch die Punkte α, β, γ, δ die Bogen aa', bb', cc', dd', auch die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$, $4d'$; nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, $d'\delta' = d\delta$, so sind α', β', γ', δ' die gesuchten Punkte in der durch den Anfang A gehenden Epicykloide, deren man noch weit mehr finden könnte, wenn der halbe Umfang des erzeugenden Kreises in kleinere Theile eingetheilt worden wäre.

§. 16.

Für irgend einen Punkt A' in der Epicykloide, Figur 4., sei $CP = x$, die darauf senkrechte $PA' = y$ und $CA' = z$. Man ziehe $G'Q$ mit $A'P$ parallel, und $A'R$ auf $G'Q$ senkrecht, so ist mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung der Winkel Taf. I. Fig. 4.

$CG'Q = 90° - \varphi'$

$RG'A' = CG'A' - CG'Q = \varphi - (90° - \varphi') = \varphi + \varphi' - 90°$,

daher $\sin RG'A' = -\cos(\varphi + \varphi')$

und $\cos RG'A' = \sin(\varphi + \varphi')$.

Im Dreiecke $A'G'R$ ist

$A'R = A'G \sin RG'A' = - r \cos(\varphi + \varphi')$

$G'R = A'G \cos RG'A' = r \sin(\varphi + \varphi')$

und im Dreiecke $CG'Q$

$QG' = CG' \sin G'CQ = (a + r) \sin \varphi'$

$CQ = CG' \cos G'CQ = (a + r) \cos \varphi'$.

Ferner ist

$x = CP = CQ + A'R$ und

$y = PA' = QG' - G'R$, also

(I) $x = (a + r) \cos \varphi' - r \cos(\varphi + \varphi')$

(II) $y = (a + r) \sin \varphi' - r \sin(\varphi + \varphi')$.

Im Dreiecke $A'G'C$ ist $A'C = z$, daher $z^2 = x^2 + y^2$

(III) $z^2 = (a + r)^2 + r^2 - 2r(a + r) \cos \varphi$.

Soll nun x durch y oder z ausgedrückt werden, so muß $\varphi' = \frac{r}{a} \varphi$ so beschaffen seyn, daß $\frac{r}{a}$ rational wird.

Werden die gefundenen Ausdrücke (I. II.) differenziirt, so ist

$\partial x = -(a + r) \partial \varphi' \sin \varphi' + r(\partial \varphi + \partial \varphi') \sin(\varphi + \varphi')$

oder, weil $\varphi' = \frac{r}{a} \varphi$ ist,

$\partial x = \frac{ar + r^2}{a} \partial \varphi [\sin(\varphi + \varphi') - \sin \varphi']$

$\partial y = \frac{ar + r^2}{a} \partial \varphi [\cos \varphi' - \cos(\varphi + \varphi')]$.

Beide Ausdrücke quadrirt und zusammen addirt giebt

$$\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{2r^2(a + r)^2}{a^2} \partial \varphi^2 [1 - \sin \varphi' \sin(\varphi + \varphi') - \cos \varphi' \cos(\varphi + \varphi')]$$

oder man erhält, weil

$\sin \varphi' \sin(\varphi + \varphi') + \cos \varphi' \cos(\varphi + \varphi') = \cos \varphi$

und $1 - \cos \varphi = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi^2$ ist,

$$(IV)\ \partial x^2 + \partial y^2 = \frac{4r^2(a+r)^2}{a^2}\partial\varphi^2 \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \left[\frac{2r(a+r)}{a}\partial\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi\right]^2$$

Ferner findet man aus (III)

$$(V)\quad \partial z = \frac{r\,(a+r)\,\partial\varphi \sin\varphi}{z}.$$

§. 17.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für jeden Punkt der Epicykloide zu finden.

Auflösung. Es sei ST, Figur 4., die Tangente für den Punkt A' und der Bogen $AA' = v$. Wächst v um $A'p = \partial v$, und man zieht $A'q$ auf $A'C$ und pq auf $A'q$ senkrecht, so ist $pq = \partial z$ für $A'C = z$. Aber Taf. I. Fig. 4.

$$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{2r(a+r)}{a}\partial\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi$$

§. 16. IV. und

$$\partial z = \frac{r(a+r)}{z}\partial\varphi \sin\varphi = \frac{2r(a+r)}{z}\partial\varphi \sin\tfrac{1}{2}\varphi \cos\tfrac{1}{2}\varphi$$

daher

$$\sin pA'q = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{a\cos\tfrac{1}{2}\varphi}{z}.$$

Man nehme an, daß $A'V$ auf ST senkrecht sei, so wäre $A'V$ die Normale für A', und weil $A'q$ auf $A'C$ senkrecht ist, so wird der Winkel $pA'q = CA'V$, also auch

$$\sin CA'V = \frac{a\cos\tfrac{1}{2}\varphi}{z}.$$

Wird nun die Sehne $A'M'$ gezogen, so ist, weil $G'A' = G'M' = r$, der Winkel $G'M'A' = 90° - \tfrac{1}{2}\varphi$, also $A'M'C = 180° - (90° - \tfrac{1}{2}\varphi) = 90° + \tfrac{1}{2}\varphi$, daher $\sin A'M'C = \cos\tfrac{1}{2}\varphi$.

Nun verhält sich im Dreiecke $A'M'C$

$A'C : CM' = \sin A'M'C : \sin CA'M'$, oder

$z : a = \cos\tfrac{1}{2}\varphi : \sin CA'M'$. Es ist daher

$\sin CA'M' = \frac{a \cos \frac{1}{2}\varphi}{z}$, folglich

$\sin CA'V = \sin CA'M'$, also fällt A'V in A'M oder die zum Punkte A' gehörige Normale muß durch den Berührungspunkt M' beider Kreise gehen.

Weil die Normale M'A' auf der Tangente A'T senkrecht steht, so erhält man die Lage der Tangente, wenn von A' nach dem Endpunkte L des Durchmessers M'L die Linie A'L gezogen wird, weil nur dann die beiden Linien M'A', A'T einen rechten Winkel einschließen.

Im Anfangspunkte A geht die Tangente durch den Mittelpunkt C des Grundkreises, und die Normale ist eine Tangente dieses Kreises.

Im Scheitel A'' steht die Tangente senkrecht auf dem verlängerten Halbmesser CB'' des Grundkreises, und die Normale geht durch den Mittelpunkt C desselben.

§. 18.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der Epicykloide zu finden.

Taf. I. Fig. 4. Auflösung. Der Bogen AA', Figur 4., sei $= v$ und $A'p = \partial v$, so ist §. 16. IV.

$$\partial v = \frac{2r(a+r)}{a} \partial\varphi \sin \tfrac{1}{2}\varphi, \text{ also}$$

$$v = \frac{2r(a+r)}{a} \int \partial\varphi \sin \tfrac{1}{2}\varphi = -\frac{4r(a+r)}{a} \cos \tfrac{1}{2}\varphi + \text{Const.}$$

Für $\varphi = 0$ wird $\cos \frac{1}{2}\varphi = 1$, also $\text{Const.} = \frac{4r(a+r)}{a}$, daher erhält man den Bogen

$$v = \frac{4r(a+r)}{a}(1 - \cos \tfrac{1}{2}\varphi).$$

Wird

Wird der Wälzungswinkel $\varphi = 180°$, so ist $\cos \frac{1}{2} \varphi = 0$, wenn daher der erzeugende Kreis eine halbe Umdrehung gemacht hat, so findet man die Länge AA'' der halben Epicykloide

$$v = \frac{4r(a+r)}{a}.$$

Für eine ganze Umdrehung ist $\varphi = 360°$, also $\cos \frac{1}{2} \varphi = -1$, daher die Länge der ganzen Epicykloide

$$v = \frac{8r(a+r)}{a}.$$

Wäre in diesem Falle $a = r$, so ist $v = 16r$.

§. 19.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für jeden Punkt der Epicykloide zu finden.

Auflösung. Man setze $\frac{r(a+r)}{a} = A$,

$\sin(\varphi + \varphi') - \sin\varphi' = V$ und $\cos(\varphi + \varphi') - \cos\varphi' = W$

so ist §. 16.

$\partial x = A \partial \varphi . V$ und $\partial y = - A \partial \varphi . W$.

Nimmt man $\partial \varphi$ constant, so wird

$\partial^2 x = A \partial \varphi \partial V$ und $\partial^2 y = - A \partial \varphi \partial W$, also

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = A^2 \partial \varphi^2 (V \partial W - W \partial V)$.

Aber

$\partial V = \partial \varphi \left[\cos(\varphi + \varphi') + \frac{r}{a} W\right]$ und

$\partial W = - \partial \varphi \left[\sin(\varphi + \varphi') + \frac{r}{a} V\right]$, daher

$V \partial W - W \partial V$

$= - \partial \varphi \left[\frac{r}{a}(V^2 + W^2) + V \sin(\varphi + \varphi') + W \cos(\varphi + \varphi')\right]$

oder wenn man für V und W die angenommenen Werthe setzt und abkürzt

$$V\partial W - W\partial V = -\frac{2r+a}{a}(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi,$$ daher

$$\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y = -\frac{2r+a}{a}A^2(1-\cos\varphi)\,\partial\varphi^3.$$

Bezeichnet ϱ den Krümmungshalbmesser, so ist ganz allgemein

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y}.$$ Da nun §. 17.

$$\partial v^3 = 8A^3\partial\varphi^3\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3 = 4A^3\partial\varphi^3\sin\tfrac{1}{2}\varphi(1-\cos\varphi),$$

so erhält man

$$\varrho = \frac{4A^3\partial\varphi^3\sin\frac{1}{2}\varphi(1-\cos\varphi)}{-\frac{2r+a}{a}A^2(1-\cos\varphi)\partial\varphi^3} = -\frac{4aA\sin\frac{1}{2}\varphi}{2r+a}$$

und weil sich das Minuszeichen hier lediglich auf die Lage des Krümmungshalbmessers bezieht, so erhält man ohne diese Rücksicht den Krümmungshalbmesser

$$\text{(I)}\quad \varrho = \frac{4r(a+r)}{2r+a}\sin\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Für den Anfang der Epicykloide in A, Figur 4., ist $\varphi = 0$, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = 0$, daher

$$\varrho = 0.$$

Im Scheitel bei A″ ist $\varphi = 180°$, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = 1$, daher

$$\text{(II)}\quad \varrho = \frac{4r(a+r)}{2r+a}.$$

Für $a = \infty$ wird der Grundkreis eine grade Linie, und $\varrho = 4r\sin\frac{1}{2}\varphi$, wie §. 6. bei der Cykloide.

§. 20.

Taf. I. Fig. 4. Zusatz. Man setze die Sehne $A'M' = t$, so ist im rechtwinklichten Dreiecke $M'A'L$ der Winkel $A'LM' = \frac{1}{2}\varphi$, daher $M'A' = t = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi$. Diesen Werth in die Gleichung (I) gesetzt, so erhält man

den Krümmungshalbmesser durch die Sehne t ausgedrückt, oder

$$\text{(I)}\ \varrho = \frac{2(a+r)}{2r+a} \cdot t.$$

Für $a = r$ wird

$$\varrho = \tfrac{4}{3}t$$

und für einen unendlich großen Erzeugungskreis wird der Halbmesser $r = \infty$, also

$$\varrho = t.$$

Für $a = \infty$ ist $\varrho = 2t$, wie bei der Cykloide §. 7.

Wollte man den Krümmungshalbmesser durch den Abstand $CA' = z$ ausdrücken, so ist §. 16. III.

$\cos\varphi = \frac{(a+r)^2 + r^2 - z^2}{2r(a+r)}$, und hieraus

$1 - \cos\varphi = \frac{z^2 - a^2}{2r(a+r)}$. Aber nach bekannten Lehren ist

$\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$ daher $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{z^2-a^2}{4r(a+r)}}$

Wird dieser Werth statt $\sin\frac{1}{2}\varphi$ in die Gleichung (I) des vorhergehenden §. gesetzt, so erhält man

$$\text{(II)}\ \varrho = \frac{2\sqrt{[r(a+r)(z+a)(z-a)]}}{2r+a}.$$

Wäre $r = \infty$, so wird $\varrho = \frac{2\sqrt{[r^2(z+a)(z-a)]}}{2r}$,

oder $\varrho = \sqrt{(z^2 - a^2)}$.

§. 21.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ACA', Figur 4., zu finden, welche zwischen der Epicykloide AA', dem Halbmesser AC und dem verlängerten Halbmesser CA' liegt. Taf. I. Fig. 4.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung setze man den Inhalt der Fläche $ACA' = F$

so ist, wenn $AA' = v$, $A'p = \partial v$ und $pq = \partial z$ gesetzt wird, $A'q = \sqrt{(\partial v^2 - \partial z^2)}$, also

$$\partial F = \tfrac{1}{2} z . A'q = \tfrac{1}{2} z \sqrt{(\partial v^2 - \partial z^2)} = \tfrac{1}{2} \partial v \sqrt{\left(z^2 - \frac{z^2 \partial z^2}{\partial v^2}\right)}$$

Nun ist §. 16. (IV) $\tfrac{1}{2} \partial v = \frac{r(a+r)}{a} \partial \varphi \sin \tfrac{1}{2} \varphi$, und §. 17.

$\frac{z^2 \partial z^2}{\partial v^2} = a^2 \cos \tfrac{1}{2} \varphi^2 = a^2 - a^2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$, und §. 20.

$z^2 - a^2 = 4r(a+r) \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$, also

$z^2 = 4r(a+r) \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 + a^2$, daher

$$z^2 + \frac{z^2 \partial z^2}{\partial v^2} = 4r(a+r) \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 + a^2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$$
$$= (a+2r)^2 \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2,$$ folglich

$$\partial F = \frac{r(a+r)(a+2r)}{a} \partial \varphi \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2 = \frac{r(a+r)(a+2r)}{2a} \partial \varphi (1 - \cos \varphi)$$

und hieraus, weil

$\int \partial \varphi (1 - \cos \varphi) = \text{Arc}\, \varphi - \sin \varphi$, so ist die Fläche

$$F = \frac{r(a+r)(a+2r)}{2a} (\text{Arc}\, \varphi - \sin \varphi)$$

wo keine Constante hinzukommt, weil φ mit F verschwindet.

Für $\varphi = \pi$ ist $\sin \varphi = 0$, und der Punkt A' fällt in den Scheitel A'', man findet daher für die halbe Epicykloide den Raum ACA'', oder

$$F = \frac{\pi r (a+r)(a+2r)}{2a}.$$

II. Die verkürzte Epicykloide.

§. 22.

Anstatt den beschreibenden Punkt im Umfange des erzeugenden Kreises AB, Figur 5., anzunehmen, kann man denselben in O außerhalb dieses Kreises setzen. Wird nun mit dem Halbmesser GO der Kreis O β Q M O beschrieben, so ist dieses der beschreibende, und A o B A der erzeugende oder wälzende Kreis. Bei der Fortwälzung des erzeugenden Kreises auf dem Grundkreise $Am'M'$ beschreibt der Punkt O eine krumme Linie $OoGO'O''$, welche eine verkürzte (curtata) oder verschlungene Epicykloide heißt. Taf. I. Fig. 5.

Kommt der beschreibende Punkt von O nach O', und man setzt den Wälzungswinkel $CG'O' = \varphi$, den Grundwinkel $GCG' = \varphi'$, $AC = a$, $GO = b$, $GA = r$, so ist wie §. 13. der Grundwinkel

$$\varphi' = \frac{r}{a}\varphi.$$

Auch läßt sich eben so wie §. 14., wenn die Entfernung eines Punkts N von C gegeben ist, der zugehörige Punkt O' in der verkürzten Epicykloide durch Zeichnung finden, wenn man aus C den Bogen NN' zieht, $Am' = Am$ nimmt; durch C und m' die Linie CN' zieht, und $N'O' = NM$ macht, so ist O' der gesuchte Punkt.

Diese Eigenschaft kann leicht zum Zeichnen der verkürzten Epicykloiden angewandt werden. Denn man nehme auf dem Grundkreise $AB'Z$ den Bogen AB' eben so groß, als den halben Umfang des erzeugenden Kreises

AC, ziehe durch den Endpunkt B′ die Linie CX′, theile den halben Umfang des beschreibenden Kreises OQ in mehrere gleiche Theile $O\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, δQ, und ziehe durch die Theilungspunkte O, α, β, γ, δ, Q die Bogen O 5, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, Cc′, dd′, QX′; theile ferner den Bogen O 5 ebenfalls in fünf gleiche Theile O, 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; 4, 5, und ziehe durch die Theilungspunkte von C aus die Linien 1a′, 2b′, 3c′, 4d′, so erhält man die Punkte α', β', γ', δ' in der verkürzten Epicykloide, wenn $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, $d'\delta' = d\delta$ genommen werden.

§. 23.

Taf. I Fig. 5. Auf CQ, Figur 5., ziehe man O′P senkrecht, und setze $CP = x$, $PO' = y$ und $CO' = z$, so erhält man auf eine ähnliche Art wie §. 16.

$$x = (a+r)\cos\varphi' - b\cos(\varphi+\varphi')$$
$$y = (a+r)\sin\varphi' - b\sin(\varphi+\varphi')$$
$$z^2 = (a+r)^2 + b^2 - 2b(a+r)\cos\varphi$$

und es läßt sich leicht einsehn, daß man zur Bestimmung der Normale O′M′ und Tangente ST ähnliche Resultate wie §. 17. erhält, und daß überhaupt die übrigen Eigenschaften der verkürzten Epicykloide eben so wie bei der gemeinen gefunden werden können.

III. Die gestreckte Epicykloide.

§. 24.

Fig 6. Fällt der beschreibende Punkt O, Figur 6., innerhalb des erzeugenden oder wälzenden Kreises AB, und derselbe beschreibt durch die Umdrehung des erzeugenden Kreises

AB auf dem Grundkreise AM′ die Linie AO′O″, so ist diese eine gestreckte oder verlängerte (elongata) Epicykloide.

Wenn der Mittelpunkt G des erzeugenden Kreises nach G′ kommt, und man setzt den Wälzungswinkel CG′O′ = φ, den Grundwinkel GCG′ = φ', AC = a, GO = b, GA = r, so ist hier ebenfalls

$$\varphi' = \frac{r}{a} \varphi$$

und man erhält, um die gestreckte Epicykloide zu zeichnen, ähnliche Resultate, wie bei den vorhergehenden Untersuchungen, daher die Zeichnungsart um so weniger näher beschrieben werden darf, weil solche durch die Ansicht der sechsten Figur schon hinlänglich erläutert ist. Uebrigens ist durch die Linie X′XX″ eine verkürzte, durch Y′YY″ eine gestreckte, und durch Z′ZZ″ eine gemeine Epicykloide dargestellt.

Auch in Absicht der Normale O′m′ und der Tangente ST gilt dasselbe, was schon bei der verkürzten Epicykloide erinnert ist.

IV. Die Hypocykloide.

§. 25.

Wälzt sich der erzeugende Kreis nicht außerhalb um den Grundkreis, sondern mit diesem in einerlei Ebene innerhalb desselben, und man nimmt im Umfange des Erzeugungskreises AB, Figur 7., einen beschreibenden Punkt A an, so wird bei der Fortwälzung innerhalb des Grundkreises AM′ der Punkt A eine krumme Linie AA′Z be- Taf. II. Fig. 7.

schreiben, welche man die gemeine Hypocykloide nennt. Liegt der beschreibende Punkt A nicht im Umfange, sondern außerhalb des erzeugenden Kreises, so entstehet eine verkürzte, und wenn A innerhalb dieses Kreises liegt, eine gestreckte Hypocykloide. Hier wird nur von der gemeinen die Rede seyn, weil sich die Eigenschaften der übrigen eben so leicht ableiten lassen. Zuweilen pflegt man auch die Hypocykloiden innere Epicykloiden (*Roulette intérieure*) zu nennen.

Der Mittelpunkt G des Erzeugungskreises sei von G bis G′ gelangt, und der beschreibende Punkt, welcher in A mit dem Grundkreise zusammen fiel, nach A′, so ist der abgewälzte Bogen $M'A' = AM$, und $A'G'M' = \varphi$ der Wälzungswinkel, wozu der Grundwinkel $ACM' = \varphi'$ gehört.

Eben so wie §. 13. ist auch hier, wenn $AC = a$ und $GA = r$ gesetzt wird

$$\varphi' = \frac{r}{a}\,\varphi \text{ oder } \varphi = \frac{a}{r}\,\varphi'.$$

§ 26.

Taf. II. Fig. 7. In der Linie AC, Figur 7., sei ein Punkt N gegeben, so läßt sich leicht ein Punkt A′ der Hypocykloide finden, welcher eben so weit von C absteht, wenn man aus C den Bogen NN′ beschreibt, AM′ auf dem Grundkreise dem Bogen AM gleich macht, und NM von N′ nach A′ trägt, so ist A der gesuchte Punkt, welches sich eben so wie §. 14. beweisen läßt.

Hieraus folgt ein leichtes Verfahren zum Zeichnen der Hypocykloide. Man theile den halben Umfang des erzeugenden Kreises in mehrere gleiche Theile $A\alpha$, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$,

γB, ziehe aus C durch die Theilungspunkte A, α, β, γ, B die Bogen aa', bb', cc', $B\delta'$, nehme A4 eben so groß als den halben Umfang des erzeugenden Kreises, und theile A4 in eben so viel gleiche Theile A 1; 1, 2; 2, 3; 3, 4; ziehe nach C die Linien $1a'$, $2b'$, $3c'$, 4C, nehme $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$, so sind A, α', β', γ', δ' Punkte, welche in der Hypocykloide liegen.

§. 27.

Zusatz. Der Halbmesser des Grundkreises sei dem Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich, also, Figur 8., $AC = 2 . AG$, so wird jede willkürlich gezogene Linie CM', welche den erzeugenden Kreis in M und den Grundkreis in M' schneidet, gleiche Bogen AM und AM' abschneiden. Denn der Winkel ACM' ist Mittelpunktswinkel für den Bogen AM', und Umfangswinkel für den Bogen AM, also hat der Bogen AM einen doppelt so großen Mittelpunktswinkel. Da sich nun bei gleich großen Bogen die Mittelpunktswinkel umgekehrt wie ihre Halbmesser verhalten, so ist $AM = AM'$. Taf. II. Fig. 8.

Nimmt man nun CM' als Durchmesser eines erzeugenden Kreises an, welcher AC in A' schneidet, so ist auch der Bogen $M'A' = AM$, weil beide Bogen einerlei Umfangswinkel ACM' haben. Es ist daher A' ein Punkt in der Hypocykloide, welcher zum Wälzungswinkel $M'G'A' = \varphi$ gehört, und weil für jeden andern Wälzungswinkel der zugehörige Punkt A' ebenfalls in die Linie CA fällt, so ist in dem Falle, wenn der Durchmesser des erzeugenden Kreises dem Halbmesser des Grundkreises gleich ist, die Hypocykloide eine

grade Linie oder demjenigen Durchmesser des Grundkreises gleich, welcher durch den Anfangspunkt A geht.

§. 28.

Taf. II. Fig. 7 Aus irgend einem Punkte A', Figur 7., der Hypocykloide sei A'P sowohl als G'Q auf AC, und A'R auf G'Q senkrecht gezogen, und man setze CP = x, PA' = y, CA' = z; A'G'M' = φ, ACM' = φ', so ist der Winkel

CG'Q = 90° — φ' und CG'A' = 180° — φ, also ist, weil

RG'A' = CG'Q — CG'A' = $\varphi - \varphi' - 90°$,

$\sin RG'A' = -\cos(\varphi - \varphi')$

$\cos RG'A' = \sin(\varphi - \varphi')$, daher

$A'R = A'G \sin RG'A' = -r\cos(\varphi - \varphi')$

$G'R = A'G' \cos RG'A = r\sin(\varphi - \varphi')$

$QG' = CG' \sin G'CQ = (a - r)\sin\varphi'$

$CQ = CG' \cos G'CQ = (a - r)\cos\varphi'$. Ferner ist

$x = CP = CQ - A'R$ und

$y = PA' = QG' - G'R$, also

(I) $x = (a - r)\cos\varphi' + r\cos(\varphi - \varphi')$

(II) $y = (a - r)\sin\varphi' - r\sin(\varphi - \varphi')$.

Im Dreiecke CG'A' ist der Winkel CG'A' = 180° — φ, also $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, daher, weil AC = z ist,

(III) $z^2 = (a - r)^2 + r^2 + 2r(a - r)\cos\varphi$.

Weil $\varphi' = \frac{r}{a}\varphi$ ist (§. 25.), so folgt aus der Vergleichung vorstehender drei Gleichungen mit den Ausdrücken für die Epicycloide §. 16., daß solche mit denselben überein kommen, wenn der Halbmesser r negativ

genommen wird. Die Lage der Tangente und Normale wird daher auf eine ähnliche Art wie §. 17. gefunden. Ist nemlich TM' der Durchmesser des erzeugenden Kreises, welcher zum Punkte A' der Hypocykloide gehört, so findet man die Tangente ST, welche zum Punkte A' gehört, wenn durch A' und den Endpunkt T des Durchmessers $M'T$ die Linie TS gezogen wird. Die Normale ist alsdann $A'M'$.

§. 29.

Zusatz. Wird der Halbmesser des Grundkreises dem Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich, so ist $a = 2r$ und $\varphi = 2\varphi'$. Setzt man diese Werthe in die gefundenen Gleichungen, so ist

$$x = 2r\cos\varphi'$$

$$y = r(\sin\varphi' - \sin\varphi') = 0$$

$$z^2 = 2r^2(1 + \cos 2\varphi') = 2r^2 . 2(\cos\varphi')^2, \text{ also}$$

$$z = 2r\cos\varphi'.$$

Dies giebt

$$x = z \text{ und } y = 0,$$

daher fällt die Hypocykloide in den Halbmesser CA, und wird eine grade Linie, wie solches schon aus §. 27. folgt.

§. 30.

Der Grundkreis $AM'Z$, Figur 9., einer Epicykloide AOZ, deren Anfangspunkt in A liegt, werde von dem Grundkreise $A'M'Z'$ einer Hypocykloide $A'OZ'$, deren Anfangspunkt in A' liegt, dergestalt in M' berührt, daß die Bogen AM' und $A'M'$ einander gleich sind; ist nun der erzeugende Kreis $M'OTN$ für beide Kurven gleich groß, und man nimmt auf demselben den Bogen $M'O = M'A = M'A'$, so werden beide Kurven durch Taf. II. Fig. 9.

den Punkt O gehen, und sich daselbst berühren. Daß beide Kurven durch O gehen, folgt aus §. 13. und 26. Da nun §. 15. und 28. OT die Tangente, und OM′ die Normale für beide Kurven ist, so müssen sie sich auch im Punkte O berühren.

Wird demnach der Grundkreis A′M′Z′ der Hypocykloide auf dem Grundkreise AM′Z der Epicykloide fortgewälzt, so bleiben beide Kurven für alle Lagen der Grundkreise mit einander in Berührung.

Ist der Halbmesser des Grundkreises der Hypocykloide dem Durchmesser des erzeugenden Kreises gleich, so fällt die Hypocykloide in den Durchmesser des Grundkreises, welcher durch den Anfangspunkt A′ geht, und dieser Durchmesser bleibt bei allen Lagen beider Grundkreise eine Tangente der Epicykloide.

§. 31.

Ueber die Eigenschaften der ebenen Epicykloiden findet man in den Mémoires de l'acad. de Paris, Année 1706 (Amsterdam 1708) zwei Abhandlungen von *de la Hire*

Traité des Roulettes, où l'on demontre universellement de trouver leurs touchantes, leur points de récourbement et de rebroussement, leurs superficies et leurs longueurs. p. 438 — 488.

Méthode générale pour réduire toutes les lignes courbes à des Roulettes. p. 489 — 499.

Beide Abhandlungen zeichnen sich zwar dadurch aus, daß in denselben keine höhere Analysis vorausgesetzt wird, weshalb sie selbst von einem Anfänger leicht verstanden werden könnten, aber der Vortrag ist in einem hohen Grade un-

deutlich und nicht zureichend, wodurch wieder der angegebene Vorzug verloren geht. Sonst kann man über ebene Epicykloiden nachlesen:

Méthode générale pour déterminer la nature des courbes formées par le roulement de toutes sortes de courbes sur une autre courbe quelconque. Par M. *Nicole.* Mém. de l'acad. de Paris, Année 1707. (Amstd. 1708) p. 103 — 126.

W. J. G. Karsten Anfangsgründe der mathematischen Analysis und höhern Geometrie. Greifswalde 1786. S. 367 -- 383.

G. S. Klügel mathematisches Wörterbuch. 2. Theil. Leipzig 1805. S. 115 — 128.

V. Die sphärische Epicykloide.

§. 32.

Bei den bisher untersuchten Epicykloiden war vorausgesetzt, daß sich der Grundkreis mit dem erzeugenden Kreise in einerlei Ebene befand. Liegt hingegen der Grundkreis mit dem erzeugenden nicht in einerlei Ebene, und der Winkel, welchen der Durchmesser des Grundkreises mit dem Durchmesser des erzeugenden Kreises in jedem Berührungspunkte beider Kreise bildet, bleibt bei jeder Wälzung gleich groß, indem beide Ebenen, welche die Kreise bilden, gleiche Neigung behalten, so wird diejenige Linie, welche ein Punkt im erzeugenden Kreise beschreibt, eine **sphärische Epicykloide** (Epicyclois sphaerica) genannt.

Um die stets gleiche Neigung des wälzenden Kreises gegen den Grundkreis zu erhalten, kann man sich vorstel-

Taf. II. Fig. 10. len, daß über dem Grundkreise $AA'F$, Figur 10., die Lage des erzeugenden Kreises AB gegeben sei. Aus dem Mittelpunkt C des Grundkreises AF werde die senkrechte Linie CK errichtet, und der erzeugende Kreis AB als Grundfläche eines senkrechten Kegels AKB angenommen, dessen Spitze in die senkrechte Linie CK fällt. Bleibt nun die Kegelspitze unverändert in K, und man wälzt den Umfang seiner Grundfläche AB auf dem Grundkreise $AA'F$, so behält der erzeugende Kreis durchgängig gleiche Neigung gegen die Ebene des Grundkreises, weshalb man ABK den wälzenden oder erzeugenden **Kegel** nennen kann. Fällt der Punkt K oberhalb des Mittelpunkts C, so kann man sich einen zweiten unbeweglichen Kegel AKF vorstellen, dessen Grundfläche der Grundkreis $AA'F$, und dessen Höhe die senkrechte Linie CK bildet. Auf diesem **Grundkegel** AKF läßt sich der erzeugende Kegel herumrollen, und die Berührung beider wird jedesmal in einer graden Linie geschehen.

Die Neigung der Fläche des erzeugenden Kreises gegen die Fläche des Grundkreises oder der Winkel BAC
ω sei durchgängig $= \omega$, der Halbmesser CA des Grund-
a kreises $= a$, des erzeugenden Kreises $= r$, so wird in
r dem Falle, wenn die Höhe des Grundkegels $CK = r$ ist, der Winkel $\omega = 90$ Grad, oder der erzeugende Kreis steht senkrecht auf dem Grundkreise. Wird CK
Fig. 11. größer als r, wie Figur 11., so ist $BAC = \omega$ ein stumpfer Winkel, und wenn CK kleiner als r wird, oder
Fig. 12. wenn K noch unterhalb C fällt, wie Figur 12., so ist $BAC = \omega$ ein spitzer Winkel.

Fällt K in C, so verschwindet der Grundkegel und der

erzeugende Kegel wälzt sich auf der Ebene des Grundkreises. Fällt K unterhalb C, so wälzt sich der erzeugende Kegel ABK, Figur 12., innerhalb einer konischen Aushöhlung AKF. Taf II. Fig. 12.

Bei der Umwälzung des Kegels AKB, Figur 10., bleiben alle Punkte des erzeugenden Kreises AB gleich weit vom Punkte K entfernt, es müssen daher auch alle Punkte der beschriebenen Epicykloide gleich weit von K entfernt seyn oder in der Oberfläche einer Kugel liegen, deren Mittelpunkt K und deren Halbmesser die Seite KA des erzeugenden Kegels ist. Die sphärische Epicykloide liegt also durchgängig auf der Oberfläche einer Kugel, und ist daher eine Linie von doppelter Krümmung. Hat der Erzeugungskreis bei seiner Umwälzung von A′ bis M die Epicykloide A′P beschrieben, so kommt der beschreibende Punkt A′ nach P, und PM ist der abgewälzte Bogen des Erzeugungskreises, welcher dem Bogen A′M des Grundkreises gleich ist. Fig. 10.

§. 33.

Aufgabe. Aus dem Halbmesser des Grundkreises, AC = a, Figur 12., und des erzeugenden Kreises AG = r, nebst dem Winkel BAC = ω, den Halbmesser AK = k derjenigen Kugeloberfläche zu finden, auf welcher die zugehörige Epicykloide beschrieben werden kann. Fig. 12.

Auflösung. Aus dem Mittelpunkte G des erzeugenden Kreises ziehe man GL auf CE, und aus B die Linie BD auf CA senkrecht, so ist AD = $2r\cos\omega$, und GL = AC — $\frac{1}{2}$AD = $a - r\cos\omega$.

Es ist aber der Winkel $GKL = BAC = \omega$, daher
$GK = GL \cdot \text{cosec}\,\omega = (a - r\cos\omega)\,\text{cosec}\,\omega$
$= a\,\text{cosec}\,\omega - r\cot\omega$
und weil $KA^2 = AG^2 + GK^2$ ist, so erhält man den gesuchten Halbmesser der Kugel

$$k = \sqrt{[r^2 + (a\,\text{cosec}\,\omega - r\cot\omega)^2]}.$$

Taf. II. Fig. 11. Fällt der Mittelpunkt K über C, wie Figur 11., so muß man eben denselben Werth für k erhalten. Es ist zwar alsdann der Winkel $GKL = 180° - BAC = 180° - \omega$; aber weil $\text{cosec}\,(180° - \omega) = \text{cosec}\,\omega$ und $\cot(180° - \omega) = -\cot\omega$ ist, so bleibt der Ausdruck für k wie oben.

Steht der erzeugende Kreis senkrecht auf dem Grundkreise, so ist $\omega = 90$ Grad, $\text{cosec}\,\omega = 1$ und $\cot\omega = 0$, daher

$$k = \sqrt{(r^2 + a^2)}.$$

Fällt der Mittelpunkt C des Grundkreises in den Mittelpunkt K der Kugeloberfläche, so ist $k = a$ und $BAK = \omega$, man erhält daher im Dreiecke GAK

$$\cos\omega = \frac{AG}{AK} = \frac{r}{a}$$

in diesem Falle rollt der erzeugende Kegel auf der Ebene des Grundkreises.

§. 34.

Im Vierecke AGKC, Figur 11., sind bei G und C rechte Winkel, daher ist
$CAG + CKG = 180°$. Aber auch
$GKI + CKG = 180°$, daher ist der Winkel
$CAG = GKI$.

Die

Die rechtwinklichten Dreiecke A G o und C K o, Figur 12., sind einander ähnlich, daher ist auch der Winkel

CAG = GKI, wie Figur 11.

Hieraus folgt, daß der Winkel, unter welchem die Ebene des Erzeugungskreises gegen den Grundkreis geneigt ist, dem Winkel gleich ist, unter welchem die Axe des Erzeugungskegels die Axe des Grundkegels schneidet, oder es ist CAG = ω = GKI.

§. 35.

Aufgabe. Eine sphärische Epicykloide zu zeichnen.

Auflösung. Aus dem gegebenen Halbmesser a des Grundkreises, dem Halbmesser r des erzeugenden Kreises, und dem Winkel ω, unter welchem beide Kreisflächen gegen einander geneigt sind, läßt sich (§. 33.) der Halbmesser k von der Kugeloberfläche finden, auf welcher die Epicykloide beschrieben werden muß. Es sei nun ABB″A″, Figur 13., eine Zone von dieser Kugeloberfläche, welche von den Parallelkreisen AA″, BB″ und den Bogen AB, A″B″ eingeschlossen ist, so daß diese beide Bogen in den gemeinschaftlichen Pol der Parallelkreise zusammen laufen. Ferner sei AA″ ein Theil des Grundkreises, und die grade Linie AB = 2r der Durchmesser des erzeugenden Kreises, dessen Umfang AMB ganz in die Oberfläche der Kugel fällt (§. 32.). Nimmt man den beschreibenden Punkt in A an, und läßt den Kreis AMB auf AA″ bis M′ wälzen, so muß, wenn AA′ die beschriebene Epicykloide ist, der abgewälzte Bogen M′A′ dem Bogen AM′ gleich seyn. Durch A′ sei der Parallelkreis NN′ gelegt, welcher den zum Anfangspunkt der Epicykloide gehörigen erzeugenden Kreis in M schneidet, so ist der Bogen AM = A′M′,

Taf. II. Fig. 13.

also der Punkt A nach A′ und M nach M′ gekommen. Für jeden Punkt N im Bogen BNA, welcher durch den Anfangspunkt A der Epicykloide geht, findet man daher den zugehörigen Punkt A′ derselben, wenn durch N der Parallelkreis NN′ gelegt, AM′ = AM genommen, und der Bogen M′N′ durch M′, und verlängert durch den Pol der Parallelkreise gelegt wird; alsdann erhält man den Abstand NA′ = NN′ — NM.

So wie bei der ebenen Epicykloide dieser Satz zur Bestimmung eines jeden Punkts A′ derselben angewandt worden ist, um danach die ganze krumme Linie zu zeichnen, so kann dies auch bei der sphärischen geschehen. Es sei daher A″βB″ der halbe Umfang des erzeugenden Kreises, und A″4 eben so groß; A″βB″ werde in eben so viel gleiche Theile A″α, αβ, βγ, γB″ getheilt wie A 4, und durch α, β, γ die Parallelkreise aa′, bb′, cc′, durch 1, 2, 3 aber solche Kreisbogen gelegt, welche sich im Pole der Parallelkreise schneiden. Man nehme a′α′ = aα, b′β′ = bβ, c′γ′ = cγ, so wird die sphärische Epicykloide durch die Punkte A″α′β′γ′d′ gehen.

§. 36.

Wird der Halbmesser r des erzeugenden Bogens sehr klein gegen den Halbmesser a des Grundkreises, so fällt Taf. II. Fig. 13. der Bogen AB, Figur 13., mit dem Durchmesser AB des erzeugenden Kreises beinahe zusammen, und man kann annehmen, daß die Epicykloide in einen Kegel falle, dessen krumme Oberfläche durch AB geht. Bei dieser Annahme wird die sphärische Epicykloide eben so wie die ebene Epicykloide oder Hypocykloide gezeichnet. Denn man darf nur aus dem gegebenen Halbmesser des Grundkreises,

A C oder $A'C' = a$, Figur 14., dem Durchmesser des erzeugenden Kreises A B oder $A'B' = 2r$ und dem Winkel B A C oder $B'A'C' = \omega$, zuerst die Seite A Q oder $A'Q'$ des senkrechten Kegels suchen. Diese erhält man, weil $C'A'Q' = 180° - \omega$, also $\sec(180° - \omega) = \sec\omega$ ist, Taf. I. Fig. 14.

$$AQ \text{ oder } A'Q' = a \sec\omega.$$

Mit dieser Länge beschreibe man, Figur 15. und 16., die Bogen $A\alpha$ oder $A'\alpha'$, nehme den Bogen $A\alpha$ oder $A'\alpha' = 2a\pi$, und auf dem Halbmesser Q A oder $Q'A'$, die Linie A B oder $A'B' = 2r$, so sind $A\alpha\beta B$ oder $A'\alpha'\beta'B'$ ebene Flächen, welche um den Kegel gelegt den Mantel von demjenigen Theile der krummen Oberfläche desselben bilden, innerhalb welchem sich die zu beschreibende Epicykloide befindet. Man kann daher diese Linie auf dem Mantel in einer Ebene beschreiben, und den Streifen alsdann um die zugehörige Zone des Kegels oder der Kugel legen, so erhält man die sphärische Epicykloide desto genauer, je kleiner r gegen a ist. Fig. 15. 16.

Wenn ω ein spitzer Winkel ist, so entsteht in der Ebene $AB\beta\alpha$ eine Hypocykloide, und wenn ω stumpf wird, eine Epicykloide. Für beide gelten die im Vorhergehenden erwiesenen Eigenschaften.

Wäre endlich $\omega = 90$ Grad, so daß der Durchmesser a b des erzeugenden Kreises auf der durch den Grundkreis gelegten Ebene senkrecht steht, so fällt unter der obigen Voraussetzung die sphärische Epicykloide in die Oberfläche eines Cylinders; der Mantel wird ein Rechteck, und die Kurve, welche auf der Ebene des Rechtecks beschrieben werden muß, ist eine Cykloide,

welche bei b a Figur 14. um die Kugel gelegt, die sphärische Epicykloide bildet.

§. 37.

Aufgabe. Die Länge der sphärischen Epicykloide zu finden.

Taf. II. Fig. 17. Auflösung. Auf dem Grundkreise A M, Figur 17., werde der Erzeugungskreis M B von A bis M gewälzt, wodurch die Epicykloide A O beschrieben, und der Bogen M O dem Bogen A M gleich ist. Man ziehe O N auf den Durchmesser B M senkrecht, und setze M N = u. Ferner sei C der Mittelpunkt des Grundkreises, und der unveränderliche Neigungswinkel B M C = ω, der Halbmesser des Grundkreises C M = a, des Erzeugungskreises B G = G M = r. Aus O werde auf die Ebene C A M des Grundkreises die Linie O Q senkrecht gezogen, und durch N O Q die Ebene N O Q P gelegt, so ist O Q = N P und N O = Q P. In der Ebene C A M

Fig. 18. sei A Q die Projection der Epicykloide A O, Figur 18. Wächst nun A O um das Element O o, A Q um Q q, und A M um M m, so ziehe man den Halbmesser C m, verlängere die auf C M senkrechte Linie Q P bis R, und unbestimmt nach D. Aus q sei q p auf C m senkrecht gezogen und bis D verlängert, so sind die Dreiecke C P R und D p R einander ähnlich. Mit Rücksicht auf Figur 17. und 18. ist

$MP = u \cos \omega$, also $\partial (MP) = \partial u \cos \omega$

$OQ = NP = u \sin \omega$, also $\partial (OQ) = \partial u \sin \omega$

$NO = PQ = \sqrt{(2ru - u^2)}$, also $\partial (PQ) = \frac{(r-u)\,\partial u}{\sqrt{(2ru - u^2)}}$

und wegen der Eigenschaft des Kreises, der Bogen

$MO = \int \frac{r\,\partial u}{\sqrt{(2ru-u^2)}}$. Aber Bogen MO = Bogen AM, daher $\partial(AM) = \frac{r\,\partial u}{\sqrt{(2ru-u^2)}} = Mm$.

Ferner ist

$mp - MP = Rp = \partial(MP)$

$pq - PQ = \partial(PQ)$, oder wenn qs auf DP senkrecht gezogen wird, so ist $pq = RP + Ps$ und $PQ = Ps + Qs$, also $\partial(PQ) = RP - Qs$ oder $Qs = PR - \partial(PQ)$.

Es verhält sich aber

$CM : CP = Mm : PR$ also ist $PR = \frac{CP.\partial(AM)}{CM}$ und

$Mm : CM = Rp : DR$ also ist $DR = \frac{CM.\partial(MP)}{\partial(AM)}$,

daher

$Qs = PR - \partial(PQ) = \frac{CP.\partial(AM)}{CM} - \partial(PQ)$ und

$DQ = DR - PQ - PR$, oder weil PR als unendlich klein gegen DR wegfällt

$DQ = DR - PQ = \frac{CM.\partial(MP)}{\partial(AM)} - PQ$.

Ferner verhält sich

$DR : Rp = Ds : sq$, also $sq = \frac{(DQ + Qs)\,\partial(MP)}{DR}$

oder weil Qs gegen DQ ebenfalls unendlich klein ist, so wird

$sq = \frac{DQ.\partial(MP)}{DR} = \frac{CM.\partial(MP) - PQ.\partial(AM)}{CM}$.

Hieraus findet man, weil

$CP = CM - MP = a - u\cos\omega$

wenn die gefundenen Werthe in die Gleichungen für die Elemente sq und Qs gesetzt werden, . .

$$sq = \frac{a \cos \omega - r}{a} \, \partial u$$

$$Qs = \frac{u(a - r \cos \omega)}{a \sqrt{(2ru - u^2)}} \, \partial u.$$

Nun ist $Qq^2 = sq^2 + Qs^2$, daher findet man das Quadrat vom Elemente der Projection

$Qq^2 = \partial u^2 \left[\frac{a \cos \omega - r}{a}\right]^2 + \partial u^2 \left[\frac{au - ru \cos \omega}{a\sqrt{(2ru - u^2)}}\right]^2$, oder

$$Qq^2 = \frac{2ra^2 \cos \omega^2 - 4ar^2 \cos \omega + 2r^3 + a^2 u \sin \omega^2 - r^2 u \sin \omega^2}{a^2 (2r - u)} \partial u^2$$

Der Bogen AO von der Epicykloide sei $= v$, so ist das Element $Oo = \partial v$ eben so groß, als die Quadratwurzel aus der Summe vom Quadrate des Elements Qq der Projection und dem Quadrate des Differentials von OQ, oder

$\partial v = \sqrt{[\partial (OQ)^2 + Qq^2]}$, oder weil $\partial (OQ) = \partial u . \sin \omega$, so erhält man das Differential vom Bogen der sphärischen Epicykloide

$$\partial v = \frac{\partial u}{a} \sqrt{\frac{2r(a^2 - 2ar \cos \omega + r^2) - r^2 u \sin \omega^2}{2r - u}}.$$

Taf. II. Fig. 17. Setzt man, Figur 17., $CG = b$, so ist

$b^2 = a^2 - 2ar \cos \omega + r^2$, daher

$$\partial v = \frac{\partial u}{a} \sqrt{\frac{2b^2 r - r^2 u \sin \omega^2}{2r - u}}.$$

Diesen Ausdruck zu integriren, setze man

$r^2 \sin \omega^2 = c^2$ und $\frac{2b^2 r - c^2 u}{2r - u} = \frac{1 + c^2 z^2}{z^2}$, so ist

$u = 2r + 2r(c^2 - b^2) z^2$, daher $\partial u = 4r(c^2 - b^2) z \partial z$, folglich

$\partial v = \frac{4r}{a}(c^2 - b^2) \partial z \sqrt{(1 + c^2 z^2)}$. Nun ist

P. A. S. 161. (VII)

$$\int \partial z \,.\, \sqrt{(1+c^2z^2)}$$
$$=\tfrac{1}{2}z\sqrt{(1+c^2z^2)}+\frac{1}{2c}\,\text{logn}\,[cz+\sqrt{(1+c^2z^2)}]+\text{Const.}$$

daher erhält man, weil $z^2 = \frac{2r-u}{2r(b^2-c^2)}$ ist,

$$v = \frac{2r}{a}(c^2-b^2)\left[\frac{\sqrt{(2b^2r-c^2u)}\sqrt{(2r-u)}}{2b^2r-2c^2r}+\frac{1}{c}\,\text{logn}\,\frac{c\sqrt{(2r-u)}+\sqrt{(2b^2r-c^2u)}}{\sqrt{(2b^2r-2c^2r)}}\right]$$
$$+\text{Const.}$$

Für u = o wird v = o, also

$$\text{Const} = \frac{2r(b^2-c^2)}{a}\left[\frac{2br}{2b^2r-2c^2r}+\frac{1}{c}\,\text{logn}\,\frac{(b+c)\sqrt{2r}}{\sqrt{(2b^2r-2c^2r)}}\right]$$

und hieraus der Bogen

$$v=\frac{2r(b^2-c^2)}{a}\left[\frac{2br-\sqrt{(2b^2r-c^2u)}\sqrt{(2r-u)}}{2b^2r-2c^2r}+\frac{1}{c}\,\text{logn}\,\frac{(b+c)\sqrt{2r}}{\sqrt{(2b^2r-c^2u)}+c\sqrt{(2r-u)}}\right]$$

wo $c = r \sin \omega$ ist.

§. 38.

1. Zusatz. Wird der Neigungswinkel $\omega = 180$ Grad angenommen, so fällt der Erzeugungskreis mit dem Grundkreise in einerlei Ebene, und v wird ein Bogen der gemeinen Epicykloide. Alsdann ist

$\cos \omega = \cos 180^\circ = -1$ und $\sin \omega = 0$, also weil $b^2 = a^2 + 2ar + r^2$, folglich $b = a + r$ ist,

$$\partial v = \frac{a+r}{a}\,\partial u \sqrt{\frac{2r}{2r-u}}, \text{ daher}$$

$$v = \frac{a+r}{a}\int \partial u \sqrt{\frac{2r}{2r-u}} = -\frac{2(a+r)}{a}\sqrt{(4r^2-2ru)}+\text{Const.}$$

Für u = o wird v = o, also $\text{Const} = \frac{4r(a+r)}{a}$, folglich der Bogen

$$\text{(I)} \quad v = \frac{2(a+r)}{a}\,[2r - \sqrt{(4r^2-2ru)}].$$

Wird nun, Figur 17., der Wälzungswinkel $MGO = \varphi$ gesetzt, so ist $OGN = 180^\circ - \varphi$, also Taf. II. Fig. 17.

$\cos OGN = -\cos \varphi$, daher

$GN = OG . \cos OGN = - r \cos \varphi$, also

$MN = MG + GN$, oder

$$u = r - r \cos \varphi = r(1 - \cos \varphi) = 2r \sin \tfrac{1}{2}\varphi^2.$$

Diesen Werth statt u in die obige Gleichung gesetzt, giebt den Bogen

$$\text{(II)}\ v = \frac{4r(a+r)}{a}\left(1 - \cos \tfrac{1}{2}\varphi\right)$$

wie §. 18. für die ebene Epicykloide.

§. 39.

2. Zusatz. Steht der Erzeugungskreis senkrecht auf dem Grundkreise, so ist der Neigungswinkel beider Kreisflächen oder $\omega = 90^\circ$, also $\sin \omega = 1$, daher §. 37. $c^2 = r^2$, folglich der Bogen

$$v = \frac{2(b^2 - r^2)}{a}\left[\frac{2br - \sqrt{(2b^2r - r^2u)}\sqrt{(2r-u)}}{2b^2 - 2r^2} + \text{logn}\,\frac{(b+r)\sqrt{2}}{\sqrt{(2b^2 - ru)} + \sqrt{(2r^2 - ru)}}\right]$$

wo $b^2 = a^2 + r^2$ ist.

Hieraus folgt, daß für den angegebenen Fall die sphärische Epicykloide von der Cykloide verschieden ist (§. 18.), ob man gleich beide als wenig von einander verschieden annehmen kann.

§. 40.

Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung und
Taf. II. mit Rücksicht auf Figur 17. und 18. sei AQ, Figur 19.,
Fig. 19. die Projection von der Epicykloide AO und OQ auf der Ebene des Grundkreises senkrecht. In dieser Ebene und deren Erweiterung ziehe man zum Punkte Q die Tangente TU, welche den Halbmesser CM in U schneidet, so läßt sich die Lage der Tangente für die Projection, durch den Abstand MU finden.

Im Dreiecke PQU, Figur 18., verhält sich $Qs : sq = QP : PU$, also ist $PU = \frac{QP \cdot sq}{Qs}$.

Setzt man aus §. 37. die daselbst gefundenen Werthe in diesen Ausdruck, so erhält man

$$PU = \frac{(2r - u)(a \cos \omega - r)}{a - r \cos \omega}.$$

Aber $MU = MP + PU$ und $MP = u \cos \omega$, daher erhält man den Abstand der Tangente, oder

$$MU = \frac{r \cos \omega (2a - u \cos \omega) - r(2r - u)}{a - r \cos \omega}.$$

Steht der Erzeugungskreis senkrecht auf dem Grundkreise, so ist $\omega = 90°$, also $\cos \omega = 0$, daher

$$MU = - \frac{r(2r - u)}{a}$$

und weil dieser Ausdruck jederzeit negativ ist, so kann in diesem Falle die verlängerte Tangente der Projection, den Halbmesser CM des Grundkreises nicht innerhalb der Kugel schneiden. Der Punkt U fällt außerhalb CM.

Senkrecht auf die Ebene des Grundkreises sei Ut gezogen, so ist tU mit OQ parallel, und die züm Punkte O der Epicykloide AO gehörige Tangente muß in die Ebene TUt fallen. Diese zum Punkte O gehörige Tangente sei Tt, und schneide die Linie Ut in t, so wird durch MU, Ut und den gegebenen Punkt O die Lage der Tangente Tt bestimmt.

In der Ebene TUt ziehe man On mit QU parallel, so ist $nU = OQ$ und $On = QU$. Im Dreiecke Ont verhält sich On zu nt, wie das Differential der Projection (Qq) zum Differential von OQ, oder $Qq : \partial(OQ) = On : nt$, daher $nt = \frac{\partial(OQ) \cdot QU}{Qq}$.

Im Dreiecke PQU ist bei P ein rechter Winkel (Figur 18.), daher $QU = \sqrt{(PQ^2 + PU^2)}$, und wenn man aus §. 37. die gefundenen Werthe in diese Ausdrücke setzt, so erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$nt = \frac{a\,(2r - u)\,\sin\omega}{a - r\cos\omega}.$$

Aber $Ut = Un + nt$ und $Un = OQ = u\sin\omega$, daher findet man die Höhe

$$Ut = \frac{r\sin\omega\,(2a - u\cos\omega)}{a - r\cos\omega}.$$

Wäre der Erzeugungskreis senkrecht auf dem Grundkreise, also $\omega = 90$ Grad, so wird

$$Ut = 2r = MB$$

die Höhe Ut ist daher dem Durchmesser des Erzeugungskreises gleich.

Das Quadrat der Sehne MO des Grundkreises ist nach der Eigenschaft des Kreises $= MB.MN$ oder

$$MO^2 = 2ru.$$

Wäre diese Sehne MO auf der Tangente Tt in O senkrecht, so müßte $Mt^2 - Ot^2 = MO^2 = 2ru$ seyn. Nun ist $Mt^2 = MU^2 + Ut^2$ und $Ot^2 = nt^2 + QU^2$, also $Mt^2 - Ot^2 = MU^2 + Ut^2 - nt^2 - QU^2$, und wenn man für diese Ausdrücke die gefundenen Werthe setzt, und die Größen, welche sich aufheben, wegläßt, so wird

$$Mt^2 - Ot^2 = 2ru, \text{ also auch } = MO^2.$$

Die Sehne MO steht daher auf der Tangente Tt senkrecht, und weil die Epicykloide AO ganz auf die Oberfläche einer Kugel fällt, deren Mittelpunkt K ist, so muß Tt zugleich eine Tangente der Kugeloberfläche in O seyn, daher muß der Kugelhalbmesser KO auf Tt senk-

recht stehen, und wenn man durch die Punkte O, M, K eine Ebene OMK legt, so steht die Tangente Tt auf dieser Ebene senkrecht.

Weil MO auf der Tangente Ot und auch auf der Sehne OB senkrecht steht, so darf man nur durch OB eine Ebene senkrecht auf OM legen, so muß in dieser Ebene die Tangente Ot liegen.

§. 41.

Ueber sphärische Epicykloiden findet man in den Mémoires de l'Acad. de Paris, Année 1732. (Amsterd. 1736.) vier Abhandlungen, allein man wird in denselben vergeblich auch nur über die Lage der Tangente Auskunft suchen. Die Aufsätze sind:

Problème sur les Epicycloïdes sphèriques. Par M. (Jean) *Bernoulli.* pag. 316 — 343.

Solution du même Problème et de quelques autres de cette espèce. Par M. de *Maupertuis.* p. 343 — 350.

Manière de déterminer la nature des Roulettes formées sur la superficie convexe d'une sphère. Par M. *Nicole.* p. 365 — 392.

Des Epicycloïdes sphèriques. Par M. *Clairant.* pag. 392 — 401.

Vollständigere Untersuchungen sind in den Act. acad. scient. imp. Petropolitanae pro Anno 1779. Pars I. p. 49 — 71. unter dem Titel:

De Epicycloidibus in superficia sphaerica descriptis Auct. *A. J. Lexell.*

enthalten.

Dritter Abschnitt.

Von der Evolvente oder Abwickelungslinie des Kreises.

§. 42.

Taf. III. Fig. 20. Um den unbeweglichen Kreis AMM″, Figur 20., sei ein vollkommen biegsamer unausdehnbarer Faden ohne Dicke gelegt, dessen Ende in A falle. Indem der Faden bei A angespannt erhalten und in einer Ebene abgewickelt wird, welche in der Erweiterung der Kreisfläche liegt, beschreibe das Ende A des Fadens eine Linie AN, welche man die durch Abwickelung, **Evolution**, entstandene Linie, oder die **Evolvente** (*Développante*) (evolvirende, abwickelnde) nennt. Diejenige krumme Linie AM′M″, um welche der Faden gewunden war, heißt die **Evolute** (*Développée*) oder die abgewickelte Linie. Um deutsche Ausdrücke für diese beiden Linien zu erhalten, wodurch zugleich Verwechselungen vermieden werden, könnte man die Linie, um welche der Faden gelegt ist, die **Umwickelungslinie**, und diejenige, welche durch die Abwickelung des Fadens erzeugt wird, die **Abwickelungslinie** nennen.

Bei jeder Lage des abgewickelten Fadens ist derselbe eine Tangente der **Evolute**, und es muß jedesmal der Bogen AM der Evolute, vom Anfangspunkte A der Evolvente bis zum Berührungspunkte M, eben so groß

als die Tangente MN seyn, weil diese die Länge des abgewickelten Fadens ist. Wenn man umgekehrt in der Evolvente einen willkürlichen Punkt N' annimmt, und von demselben nach der Evolute eine Tangente N'M' zieht, so ist diese Linie M'N' dem Bogen AM' der Evolute gleich. Man nennt die Linien MN, M'N' Halbmesser der Evolvente für die Punkte N, N'. Sie sind jedesmal der Länge des abgewickelten Fadens gleich, und zugleich Normalen der Abwickelungslinie.

§. 43.

Zusatz. Die angeführte Eigenschaft giebt ein leichtes Mittel an die Hand, die Evolvente ohne Beihülfe eines Fadens zu zeichnen, wenn die Evolute gegeben ist. Ist die Evolute wie hier ein Kreis, so ziehe man durch den Anfangspunkt A, Figur 21., der Evolvente den Halbmesser AB, und zu B die Tangente BD. Man mache BD dem halben Umfange des Kreises AB gleich, theile BD in mehrere gleiche Theile B 1; 1, 2; 2, 3; . . . und in eben so viel gleiche Theile Aa, ab, bc, . . . theile man den Halbkreis AbB. Ziehe nach den Theilungspunkten a, b, c, . . . die Halbmesser Ca, Cb, Cc, . . . und darauf senkrecht die Linien a 1, b 2, c 3, ...; nehme a 1 = B 1; b 2 = B 2; c 3 = B 3; u. s. w.; so sind 1, 2, 3, 4, 5, D die gesuchten Punkte der Evolvente, durch welche man die gesuchte Kurve ziehen kann. Taf. III. Fig. 21.

Auch läßt sich leicht einsehn, daß die Evolvente bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann, und in immer mehr erweiterten Bogen wie eine Spirallinie um die Evolute herum geht.

§. 44.

Taf. III. Fig. 20. Jeder Halbmesser MN, Figur 20., der Evolvente AN ist zugleich der Krümmungshalbmesser für den Punkt N, weil sich beweisen läßt, daß jeder durch N gehende Kreisbogen, dessen Halbmesser mN kleiner als MN ist, innerhalb der Evolvente, und jeder, dessen Halbmesser $m'N$ größer als MN ist, außerhalb der Evolvente fallen muß.

Von dem willkürlich angenommenen Punkte M' werde die Tangente $M'N'$ bis an die Evolvente in N' gezogen, und aus M durch N der Kreisbogen NO beschreiben, welcher die Linie $M'N'$ oder ihre Verlängerung in irgend einem Punkte O schneidet. Man ziehe MO, so ist

$MO = MN =$ Bogen MA und

$M'N' =$ Bog. $M'M +$ Bog. $MA =$ Bog. $M'M + MO$.

Aber

Bog. $M'M + MO > M'O$, daher auch

$$M'N' > M'O;$$

folglich fällt der aus M beschriebene Kreisbogen NO innerhalb der Evolvente NM, und jeder durch N gehende Kreisbogen, dessen Mittelpunkt zwischen M und N fällt, muß ebenfalls innerhalb NN' liegen.

Nimmt man den Mittelpunkt des durch N gehenden Kreisbogens auf der Verlängerung von NM, etwa in m' an, so ist $Mm' + m'M' >$ Bogen MM', also auch $NM + Mm' + m'M' > NM +$ Bogen MM', oder

$$Nm' + m'M' > N'M', \text{ oder}$$

$$Nm' + m'M' > N'm' + m'M', \text{ daher}$$

$$Nm' > N'm'.$$

Es muß daher jeder durch N aus m' gezogene Kreisbo-

gen außerhalb NN' fallen, weil m'N' kleiner als der Halbmesser Nm' ist.

Hieraus folgt, daß MN der Krümmungshalbmesser für den Punkt N ist, weil für alle zwischen M und N gelegenen Mittelpunkte die Kreisbogen innerhalb, und für alle in der Verlängerung von NM gelegenen, die Kreisbogen außerhalb der Evolvente NN' fallen.

Hiemit vergleiche man §. 20., wo der Krümmungshalbmesser ϱ bei der Epicykloide der Sehne t gleich wird.

§. 45.

Zusatz. Die Lage der Tangente für jeden gegebenen Punkt N, Figur 20., der Evolvente findet man daher, wenn zum Punkte N der Krümmungshalbmesser NM gezogen, und auf diesen in N die senkrechte Linie NT gezogen wird, so muß diese die Evolvente im Punkte N berühren. Taf. III. Fig. 20.

Man setze den Krümmungshalbmesser MN $= \varrho$, den Halbmesser AC der Evolute $=$ a, und den Abstand des Punktes N vom Mittelpunkte C oder CN $=$ z, so ist im rechtwinklichten Dreiecke $z^2 = a^2 + \varrho^2$, oder der Abstand

$$z = \sqrt{(a^2 + \varrho^2)}$$

und der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \sqrt{(z^2 - a^2)}.$$

Setzt man den Winkel ACM $= \varphi$, und bezeichnet zugleich φ denjenigen Bogen, welcher zum Winkel ACM für den Halbmesser $= 1$ gehört, so ist der Bogen AM $= a\varphi$, also

$$\varrho = a\varphi$$

und daher

$$z = a\sqrt{(1 + \varphi^2)} \text{ und } \varphi = \sqrt{\frac{z^2 - a^2}{a^2}}.$$

Nach §. 20. erhält man für den Krümmungshalbmesser der Epicykloide, wenn $r = \infty$ wird, $\varrho = \sqrt{(z^2 - a^2)}$ wie oben. Man kann daher die Kreisevolvente als eine Epicykloide ansehen, bei welcher der erzeugende Kreis unendlich groß ist.

§. 46.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der Kreisevolvente zu finden.

Taf. III. Fig. 22. Auflösung. Durch den Anfangspunkt A, Figur 22., sei die Linie CP und von irgend einem Punkte N der Evolvente die Linie NP auf CP senkrecht gezogen. Ist nun MN der Krümmungshalbmesser für den Punkt N, und man setzt

$AC = a$, $CP = x$, $PN = y$, $CN = z$,
$MN =$ Bogen $AM = \varrho$, den Winkel $ACM = \varphi$,
und den Bogen $AN = v$;

ferner MQ auf CP und NL auf MQ senkrecht gezogen, so ist der Winkel $NMQ = \varphi$, also

$NL = \varrho \sin\varphi$ und $ML = \varrho \cos\varphi$, und
$CQ = a \cos\varphi$ und $MQ = a \sin\varphi$.

Aber $\varrho = a\varphi$ (§. 45.), daher erhält man, weil

$CP = x = NL + CQ$ und
$PN = y = MQ - ML$ ist,

$$x = a(\varphi \sin\varphi + \cos\varphi)$$
$$y = a(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi).$$

Hieraus findet man ferner wenn differenziirt wird

$\partial x = a\varphi\partial\varphi \cos\varphi$ und $\partial y = a\varphi\partial\varphi \sin\varphi$, also
$\partial v^2 = \partial x^2 + \partial y^2 = a^2\varphi^2\partial\varphi^2 (\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2) = a^2\varphi^2\partial\varphi^2$.

oder

oder $\partial v = a\varphi\partial\varphi$,

und wenn integrirt wird, so findet man den Bogen der Evolvente AN, oder

$$(I)\quad v = \tfrac{1}{2}a\varphi^2$$

wo keine Constante hinzu kommt, weil φ mit v zugleich verschwindet.

Noch erhält man nach §. 45. für den Bogen der Evolvente folgende Ausdrücke

$$(II)\quad v = \frac{\varrho^2}{2a} = \frac{z^2 - a^2}{2a}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ ist daher die mittlere Proportionale zwischen dem zugehörigen Bogen der Evolvente und dem Durchmesser der Evolute.

§. 47.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ANCA, Figur 22., zu finden. Taf. III. Fig. 22.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung setze man die Fläche $ANC = F$. Wächst nun v um $Nn = \partial v$, und z um $on = \partial z$, so ist im rechtwinklichten Dreieck onN die Seite

$No = \sqrt{(\partial v^2 - \partial z^2)}$. Aber §. 46. II.

$\partial v^2 = \frac{z^2\,\partial z^2}{a^2}$, daher $No = \frac{\partial z}{a}\sqrt{(z^2 - a^2)}$, und

weil $\partial F = \text{Fläche } NCn = \tfrac{1}{2}z.No = \frac{z\,\partial z}{2a}\sqrt{(z^2 - a^2)}$

ist, so erhält man durch die Integration den Inhalt der Fläche ANCA, oder

$$F = \frac{\sqrt{(z^2 - a^2)^3}}{6a} = \frac{\varrho^3}{6a} = \tfrac{1}{6}a^2\varphi^3 \;(\text{§. } 45.)$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $z = a$ die Fläche F verschwindet.

Vierter Abschnitt.

Von der logarithmischen Linie.

§. 48.

Diejenige krumme Linie, deren Ordinaten eine geometrische Reihe bilden, wenn die zugehörigen Abscissen eine arithmetische Reihe geben, heißt eine logarithmische Linie (Curva logarithmica s. logistica). Nimmt
Taf. III. Fig. 23. man auf der Axe AP, Figur 23., die Theile AB, BC, CD, ... gleich groß an, so stehen die Abscissen AB, AC, AD, ... in einer arithmetischen Reihe. Bilden alsdann die zugehörigen Ordinaten Aa, Bb, Cc, ... eine geometrische Reihe, so klein oder groß man auch AB annehmen mag, so ist MN eine logarithmische Linie.

Für den Anfangspunkt A setze man die zugehörige Ordinate $Aa = a$; ferner $AB = b$ und $Bb = c$. Da nun die Ordinaten Aa, Bb, ... Glieder einer geometrischen Reihe sind, so verhält sich

$Aa : Bb = Bb : Cc$ oder $a : c = c : Cc$

daher ist $Cc = \frac{c^2}{a}$.

Ferner $Bb : Cc = Cc : Dd$ oder $c : \frac{c^2}{a} = \frac{c^2}{a} : Dd$,

daher ist $Dd = \frac{c^3}{a^2}$.

Eben so $Ee = \frac{c^4}{a^3}$ u. s. w.

Daher gehören zu den

Abscissen $0;\ b;\ 2b;\ 3b;\ \ldots\ nb$

die Ordinaten $a;\ c;\ \frac{c^2}{a};\ \frac{c^3}{a^2};\ \ldots\ \frac{c^n}{a^{n-1}}$.

Man setze $AP = x = nb$ und $PM = y$, so ist $y = \frac{c^n}{a^{n-1}}$

oder $y = \frac{ac^n}{a^n} = a\left(\frac{c}{a}\right)^n$. Aber $n = \frac{x}{b}$, daher findet man die Ordinate PM, oder

$$\text{(I)}\quad y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$$

oder auch

$$\left(\frac{y}{a}\right)^b = \left(\frac{c}{a}\right)^x.$$

Nimmt man hievon die Logarithmen, so ist für jedes logarithmische System

$$\text{(II)}\quad b \log \frac{y}{a} = x \log \frac{c}{a}$$

wodurch man sowohl als durch (I) die allgemeine Gleichung für die logarithmische Linie erhält.

Diese Gleichungen erhalten eine einfachere Gestalt, wenn man die Ordinate Aa, welche dem Anfangspunkte der Abscissen entspricht, $= 1$ setzt. Alsdann wird $a = 1$, daher

$$\text{(III)}\quad y^b = c^x \quad \text{und}$$

$$\text{(IV)}\quad b \log y = x \log c.$$

Es verhält sich alsdann $b : x = \log c : \log y$, oder die Abscissen verhalten sich wie die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten.

Setzt man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen $2,7182818 \ldots = e$, so ist $\text{logn}\, e = 1$. Wird

nun in (I) und (II) $\frac{c}{a} = e$ gesetzt, so erhält man

$$(V)\ y = ae^{\frac{x}{b}}$$
$$(VI)\ x = b \operatorname{logn} \frac{y}{a}$$

und für $a = 1$ wird

$$(VII)\ y = e^{\frac{x}{b}} \text{ und}$$
$$(VIII)\ x = b \operatorname{logn} y.$$

Für $a = b = 1$ wird $x = \operatorname{logn} y$; in diesem Falle sind daher die Abscissen Logarithmen von den zugehörigen Ordinaten. Auch ist alsdann $c = e$.

§. 49.

Aus der allgemeinen Gleichung $y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$ erhält man sowohl für positive als negative Werthe von x allemal positive Werthe für y, daher liegt die Kurve nur auf einer Seite der Axe AP. Mit x wächst y ohne Ende fort, und wenn x negativ wird, so können die Werthe für y ohne Ende vermindert werden, je größer x nach der Seite AP′ genommen wird, daher ist die Axe AP eine Asymptote der logarithmischen Linie.

§. 50.

Aufgabe. Eine logarithmische Linie zu zeichnen.

Taf. III. Fig. 24. Auflösung. Es sei PP′, Figur 24., die Abscissenaxe, auf welcher entweder zwei nahe neben einander liegende Ordinaten AA′ und BB′ gegeben oder willkürlich angenommen sind. Man nehme die Weite AB, trage solche aus B nach C, aus C nach D u. s. w., und ziehe durch die Punkte C, D, ... auf PP′ senkrechte Linien CC′, DD′, ... von unbestimmter Länge. Durch B

und A′ ziehe man die Linie B′A′a bis an die Axe PP′, trage aus a nach b, aus b nach c, u. s. w. die Weite AB; ziehe durch bB′ eine Linie, bis solche CC′ in C′ schneidet; durch CC′ eine Linie, bis solche DD′ in D′ schneidet u. s. w., so liegen die Punkte A′, B′, C′, D′, ... in einer logarithmischen Linie.

Beweis. Die Dreiecke aAA′, aBB′ und bBB′, bCC′ sind sich ähnlich, daher verhält sich

$$AA' : aA = BB' : aB$$

$$bB : BB' = bC : CC'.$$

Der Zeichnung gemäß ist aber

$bB = aA$ und $bC = aB$, daher verhält sich auch

$AA' : BB' = BB' : CC'$,

oder BB′ ist die mittlere Porportionale zwischen AA′ und CC′. Eben so läßt sich beweisen, daß CC′ die mittlere Proportionale zwischen BB′ und DD′ ist, u. s. w., daher bilden die Ordinaten AA′, BB′, CC′, ... eine geometrische Reihe, wenn die zugehörigen Abscissen eine arithmetische bilden, folglich liegen die Punkte A′, B′, C′, D′, ... in einer logarithmischen Linie.

§. 51.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für jeden Punkt der logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung. Die zum Punkte M, Figur 23., gehörige Tangente sei MT, und der Winkel, welchen sie mit der Ordinate MP bildet, oder PMT = φ, so ist nach bekannten Lehren tgt $\varphi = \frac{\partial x}{\partial y}$. Taf. III. Fig. 23.

Nun ist $\partial A^x = A^x \partial x \operatorname{logn} A$, daher erhält man aus der Gleichung $y = a\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}}$, wenn differenziirt wird,

$\partial y = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{x}{b}} \partial x \operatorname{logn}\frac{c}{a} = \frac{y \partial x}{b} \operatorname{logn}\frac{c}{a}$, also

$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b}{y \operatorname{logn}\frac{c}{a}}$, und hieraus

$$\text{(I)} \quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{b}{y \operatorname{logn}\frac{c}{a}}.$$

Für $\frac{c}{a} = e$ wird $\operatorname{logn}\frac{c}{a} = 1$, daher in diesem Falle

$$\text{(II)} \quad \operatorname{tgt}\varphi = \frac{b}{y}.$$

Weil im Dreiecke PMT die Linie $PT = y \operatorname{tgt}\varphi$ ist, so erhält man die Subtangente

$$\text{(III)} \quad PT = \frac{b}{\operatorname{logn}\frac{c}{a}},$$

und, für $\frac{c}{a} = e$, wird $PT = b$.

Bei der logarithmischen Linie ist daher die Subtangente eine unveränderliche Größe.

§. 52.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für jeden Punkt der logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung. Den Coordinaten x, y entspreche der Krümmungshalbmesser r und der Bogen v, so ist

$\partial v = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \partial y \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}\right)}$.

Nach §. 51. ist aber $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b}{y \operatorname{logn}\frac{c}{a}}$, oder, wenn

man $\log n \frac{c}{a} = \alpha$ setzt, $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{b}{\alpha y}$, daher erhält man

$$\partial v = \frac{\partial y \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}{\alpha y}.$$

Weil $\partial y = \frac{\alpha y \partial x}{b}$, so erhält man, wenn ∂x constant gesetzt wird

$$\partial^2 y = \frac{\alpha \partial y \partial x}{b} = \frac{\alpha \partial y}{b} \cdot \frac{b \partial y}{\alpha y} = \frac{\partial y^2}{y}, \text{ also}$$

$$\partial x \partial^2 y = \frac{b \partial y^3}{\alpha y^2}.$$

Nun ist, wenn ∂x constant angenommen wird, $r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y}$, daher findet man den Krümmungshalbmesser

$$r = \frac{-\sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)^3}}{\alpha^2 b y}.$$

§. 53.

Aufgabe. Die Länge des Bogens einer logarithmischen Linie zu finden.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. erhält man

$$\partial v = \frac{\partial y \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}{\alpha y}, \text{ daher (P. A. S. 156. III.)}$$

$$v = \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)} - b \log n \frac{b + \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}{y} + \text{Const.}$$

Für $y = a$ wird $v = 0$, also

$$\text{Const.} = -\sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)} + b \log n \frac{b + \sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)}}{a},$$

daher findet man die Länge des Bogens, oder

$$v = \sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)} - \sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)} + b \log n \frac{by + y\sqrt{(b^2 + \alpha^2 a^2)}}{ab + a\sqrt{(b^2 + \alpha^2 y^2)}}$$

wo $\alpha = \log n \frac{c}{a}$ ist.

§. 54.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche AaMP, Figur
Taf. III. 23., zu finden.

Fig. 23. Auflösung. Der Inhalt dieser Fläche sei $= F$, so ist mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung

$\partial F = y \partial x$. Aber $\partial x = \frac{b \partial y}{\alpha y}$, daher

$\partial F = \frac{b}{\alpha} \partial y$, folglich $F = \frac{b}{\alpha} y + \text{Const.}$

Für $y = a$ wird $F = 0$, also $\text{Const.} = -\frac{ab}{\alpha}$, daher $F = \frac{by}{\alpha} - \frac{ab}{\alpha}$, oder man findet, weil $\alpha = \text{logn} \frac{c}{a}$, die Fläche

$$F = \frac{b(y-a)}{\text{logn } c - \text{logn } a}.$$

Fünfter Abschnitt.

Von den Spirallinien.

§. 55.

Fig. 25. Die Linie CB, Figur 25., sei die Axe irgend einer gegebenen krummen oder einer graden Linie QQ′, deren Natur und Lage durch eine Gleichung zwischen den rechtwinklichten Koordinaten $CP = z$ und $PQ = u$ bestimmt ist. Für zwei bekannte Koordinaten sei $CB = a$ und $BB' = b$, so läßt sich mit Hülfe der gegebenen krummen Linie QQ′ eine zweite krumme Linie NN′ durch folgendes Verfahren finden. Aus dem Punkte C als Mittelpunkt beschreibe man mit dem Halbmesser $CA = 1$ den Kreis

z
u
a
b

AMM′A, dessen Umfang alsdann $= 2\pi$ ist; auch werde jeder Bogen dieses Kreises, von der Axe CB ab, aus A nach M gemessen. Nun kann ein jeder Kreisbogen, wie AM $= \psi$, so angesehen werden, als wenn er ψ mit irgend einer Ordinate PQ $= u$ der gegebenen krummen Linie zusammen gehört, indem man den Bogen ψ durch folgende Proportion bestimmt:

$b : u = 2\pi : \psi$. Es ist daher

Bogen $\psi = \frac{2\pi u}{b}$.

Durch den Endpunkt M des Bogens ψ ziehe man den Halbmesser CM, trage die Abscisse CP $= z$ aus C nach N, so erhält man dadurch einen Punkt N in der krummen Linie NN′, dessen Abstand vom Mittelpunkte C $=$ CN $= z$ ist. Auf eine ähnliche Art lassen sich mehrere Punkte wie N finden, durch welche man die krumme Linie NN′ beschreiben kann, welche man eine Spirallinie nennt.

Die gegebene Linie QQ′, welche jede beliebige Lage erhalten kann, und zur Beschreibung der Spirallinie NN′ erfordert wird, heißt die **erzeugende Linie** (Generatrix. *Génératrice*); der Mittelpunkt C der **Pol** der Spirallinie; der Kreis AMM′A $= 2\pi$ der **Grundkreis** oder die Basis, deren Anfangspunkt A ist; die Linie CC′ die Axe der Spirallinie; der Winkel ACM für den Bogen ψ, der **Polarwinkel** des Punkts N und CN der **Polarabstand** (Radius vector) dieses Punkts.

So verschieden als die Erzeugungslinie QQ′ seyn kann, so verschieden muß auch die Gestalt der Spirallinie NN′ ausfallen. Ist daher QQ′ eine grade Linie, eine

Parabel, eine Hyperbel u. s. w., so heißt die Spirallinie eine lineare, parabolische, hyperbolische u. s. w. Jede dieser Spirallinien kann aber nach den verschiedenen Lagen, welche die Erzeugungslinie erhält, verschieden seyn.

Weil der Bogen $\psi = \frac{2\pi u}{b}$ nach Verschiedenheit der Werthe u jede Größe erhalten, und den Umfang des Grundkreises (2π) vielmal übertreffen kann, so folgt hieraus, daß sich die Spirallinie eben so oft um ihren Pol C windet. Erhält u einen negativen Werth, oder fällt PQ oberhalb der Linie CB, so wird auch der Bogen ψ negativ, und man muß die Länge dieses Bogens von A nach M', also in entgegengesetzter Richtung abmessen. Die Gleichung $\psi = \frac{2\pi u}{b}$ bleibt aber unverändert, weil ψ mit u zugleich negativ wird. Uebrigens ist es willkürlich, wo man zur Bestimmung des Maaßes für den Bogen ψ den Anfangspunkt A in der Linie CB annimmt, wenn man nur die Voraussetzung beibehält, daß für den Grundkreis der Halbmesser CA = 1 ist.

Jeder Bogen, welcher von der Axe CC' anfängt und um den Pol herum geht, bis er wieder diese Axe schneidet, heißt eine Windung der Spirallinie. Der Abstand zweier auf einander folgenden Windungen wird hier immer auf derjenigen Linie gemessen werden, welche verlängert durch den Pol geht.

I. Von der linearen oder archimedischen Spirallinie.

§. 56.

Die grade Linie KK′, Figur 26. und 27., als Erzeugungslinie einer Spirale, deren Pol in C liegt, durchschneide die Axe CC′ in A, so wird ihre Lage gegen die Axe auf folgende Art bestimmt, wenn für irgend eine beständige Linie BB′ = b, die Weite CB = a, und für den Durchschnittspunkt A die Weite CA = c bekannt ist; für irgend einen Werth PQ = u bestimme man den zugehörigen Bogen AM = ψ durch die Proportion $b : u = 2\pi : \psi$, oder indem man $\psi = \frac{2\pi u}{b}$ nimmt, so erhält man den Punkt M, also auch die Linie CM, und auf derselben den Punkt N, wenn CN = CP = z genommen wird. Fällt P′Q′ oberhalb CC′, so ist u also auch ψ negativ, daher muß der Bogen ψ von A nach M′ getragen werden. Auf diese Art lassen sich für jeden Werth von u die zugehörigen Punkte N in der Spirallinie finden; auch wird es hienach leicht seyn, eine allgemeine Gleichung für die linearen Spirallinien anzugeben. Denn es verhält sich Figur 26.

Taf. III. Fig. 26. 27.

b a c

$$BB' : AB = PQ : AP \text{ oder}$$
$$BB' : BC - AC = PQ : CP - CA \text{ daher}$$
$$b : a - c = u : z - c$$

und dieselbe Proportion gilt auch für Figur 27.

Eben so verhält sich Figur 26.

$$BB' : AB = P'Q' : AP' \text{ oder}$$
$$BB' : BC - AC = P'Q' : AC - CP' \text{ daher}$$

$$b : a - c = -u : c - z$$ oder
$$b : a - c = u : z - c.$$

Auf gleiche Art erhält man Figur 27.
$$b : c - a = u : c - z$$ oder
$$b : c - a = -u : z - c;$$

also für diese beiden Fälle
$$b : a - c = u : z - c.$$

Es ist daher ganz allgemein
$$u = \frac{b(z-c)}{a-c}.$$

Weil aber $u = \frac{b\psi}{2\pi}$,

so erhält man hieraus, wenn z entwickelt wird, eine allgemeine Gleichung für die linearen Spirallinien
$$(1)\ z = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi}.$$

Für $\psi = 0$ wird $z = c$, welches sehr wohl zu merken ist, damit die Werthe von ψ richtig beurtheilt werden können, und damit man denjenigen Punkt in der Spirallinie sogleich angeben kann, für welchen $\psi = 0$ ist.

Weil der Bogen ψ jeden positiven oder negativen Werth erhalten und bis ins unendliche wachsen kann, so wird die lineare Spirale in unzählig vielen Windungen um ihren Pol herumgeführt werden können.

Auch folgt hieraus, daß wenn die Polarwinkel ψ um gleich viel wachsen, so müssen auch die Polarabstände z um gleich viel zu nehmen.

Taf. III. Fig. 26. 27. 28. Für $c = 0$ fällt, Figur 26. und 27., A in C, (Figur 28.), und die allgemeine Gleichung verwandelt sich in die gewöhnliche Gleichung für die archimedische Spirallinie

$$(II)\ z = \frac{a\psi}{2\pi}.$$

Alsdann verhalten sich die Polarwinkel wie die zugehörigen Polarabstände der Spirallinie.

§. 57.

Wächst der Bogen AM = ψ, Figur 26., um 2π, so bleibt die Lage des Halbmessers CM, in welchen die Polarabstände fallen, ungeändert. Dasselbe gilt, wenn ψ um 2π abnimmt. Es müssen daher alle Polarabstände für die Winkel Taf. III. Fig. 26.

$$\psi;\ \psi \pm 2\pi;\ \psi \pm 4\pi;\ \psi \pm 6\pi \text{ u. s. w.}$$

in einerlei Halbmesser CM fallen.

Ist daher irgend ein Polarabstand

$$z = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi},$$

so sind für denselben Halbmesser des Grundkreises die nächsten Polarabstände

$$z' = c + (a - c)\frac{\psi \pm 2\pi}{2\pi} = c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi} \pm (a - c)$$

also der Unterschied

$$z - z' = \mp (a - c).$$

Es sind daher sämmtliche Abstände von zwei auf einander folgenden Windungen der Spirallinie einander gleich, vorausgesetzt, daß diese Abstände auf den Halbmessern des Grundkreises oder deren Verlängerung gemessen werden.

In der allgemeinen Gleichung für die Spirallinie wird $z = 0$, wenn $c + (a - c)\frac{\psi}{2\pi} = 0$, oder wenn

$$\psi = \frac{-2\pi c}{a - c}$$

wird; alsdann fällt die Spirale in den Mittelpunkt C. Bei

Bogen NP $= z\psi = \frac{2\pi z(z-c)}{a-c} = \frac{2\pi z^2}{a-c} - \frac{2\pi cz}{a-c}$

daher $\frac{2\pi z^2}{a-c}$ = Bogen NP $+ \frac{2\pi cz}{a-c}$. Es ist daher auch die Subtangente

$$CT = \text{Bogen } NP + \frac{2\pi cz}{a-c}.$$

Für $a = o$ wird

$$CT = \text{Bogen } NP - 2\pi z$$

und für $c = o$ ist

$$CT = \text{Bogen } NP.$$

Man setze den Winkel $CNT = \omega$, so ist $\text{tgt}\,\omega = \frac{CT}{CN}$, oder

$$\text{(II)} \quad \text{tgt}\,\omega = \frac{2\pi z}{a-c} = \frac{2\pi c}{a-c} + \psi.$$

Für $z = o$ wird

$$\text{tgt}\,\omega = o,$$

also fällt die Tangente, welche die Spirallinie im Pole C berührt, in den Halbmesser AC.

Für $z = a - c$ ist

$$\text{tgt}\,\omega = 2\pi = 6,283185 = \text{tgt}\ 80^\circ\ 57'\ 25''$$

und für $z = 2(a-c)$ wird

$$\text{tgt}\,\omega = 4\pi = 12,566370 = \text{tgt}\ 85^\circ\ 27'\ 0''\ 3'''.$$

§. 60.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der archimedischen Spirallinie zu finden.

Auflösung. Damit die Länge dieses Bogens vom Pole ab bestimmt werde, und derselbe mit $\psi = o$ zugleich verschwinde, so muß zur Bestimmung der Polarabstände die Gleichung §. 56. II. $z = \frac{a\psi}{2\pi}$ angenommen werden, wo ψ mit z zugleich $= o$ wird. Es sei daher,

Figur

Figur 28., der Bogen CN $= v$, dessen zugehöriger Taf. III. Fig. 28.
Bogen am Grundkreise $= \psi$ ist, so erhält man für
$Nn = \partial v$, $on = \partial z$ und $No = z\partial\psi$, also
$Nn = \sqrt{(on^2 + No^2)}$ oder $\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2\partial\psi^2)}$.

Es ist aber $\partial z = \frac{a\partial\psi}{2\pi}$, also $\partial\psi^2 = \frac{4\pi^2\partial z^2}{a^2}$, daher $\partial v = \partial z\sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2 z^2}{a^2}\right)} = \frac{\partial z}{a}\sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)}$, folglich (P. A. S. 161. VII)

$$v = \frac{1}{a}\int\partial z\sqrt{(a^2+4\pi^2 z^2)} = \frac{zw}{2a} + \frac{a}{4\pi}\text{logn}(2\pi z+w) + \text{Const}$$

wo zur Abkürzung

$$a^2 + 4\pi^2 z^2 = w^2$$

gesetzt worden ist.

Für $v = 0$ wird $z = 0$ und $w = a$, daher Const. $= -\frac{a}{4\pi}$ logn a, folglich der Bogen

$$v = \frac{zw}{2a} + \frac{a}{4\pi}\text{ logn }\frac{2\pi z + w}{a}.$$

Am Ende der ersten Windung ist $z = a$, also $w = a\sqrt{(1 + 4\pi^2)}$, daher erhält man die Länge der Spirallinie, welche die erste Windung bildet, oder wenn $\psi = 2\pi$ wird

$$= \tfrac{1}{2}a\sqrt{(1+4\pi^2)} + \frac{a}{4\pi}\text{ logn }[2\pi + \sqrt{(1+4\pi^2)}].$$

Am Ende der zweiten Windung ist $z = 2a$, also $w = a\sqrt{(1 + 16\pi^2)}$, folglich die Länge der ersten und zweiten Windung

$$= a\sqrt{(1+16\pi^2)} + \frac{a}{4\pi}\text{ logn }[4\pi + \sqrt{(1+16\pi^2)}].$$

§. 61.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser zu finden.

Taf. III. Fig. 28. Auflösung. Man setze, Figur 28., AR $= x$, PM $= y$, so ist $x = - z \cos\psi$ und $y = z \sin\psi$.

Soll nun ψ mit z zugleich verschwinden, so erhält man die gewöhnliche Gleichung $z = \frac{a\psi}{2\pi}$, daher $\partial z = \frac{a\partial\psi}{2\pi}$. Wird nun $\partial\psi$ constant angenommen, so ist $\partial^2\psi$ und $\partial^2 z = 0$, daher

$$\partial x = - \partial z.\cos\psi + z\partial\psi.\sin\psi$$
$$\partial^2 x = 2\partial z\partial\psi.\sin\psi + z\partial\psi^2.\cos\psi$$
$$\partial y = \partial z.\sin\psi + z\partial\psi.\cos\psi$$
$$\partial^2 y = 2\partial z\partial\psi.\cos\psi - z\partial\psi^2.\sin\psi$$

und hieraus nach erforderlicher Zusammenziehung

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = 2\partial z^2\partial\psi + z^2\partial\psi^3$$

oder, wenn man statt $\partial\psi$ seinen Werth $\frac{2\pi\partial z}{a}$ setzt,

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = \frac{4\pi}{a^3}(a^2 + 2\pi^2 z^2).$$

Nun ist nach bekannten Regeln, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser für den Punkt N bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y},$$

daher findet man, weil §. 60. $\partial v = \frac{\partial z}{a}\sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)}$, den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{\sqrt{(a^2 + 4\pi^2 z^2)^3}}{4\pi(a^2 + 2\pi^2 z^2)} = \frac{a\sqrt{(1 + \psi^2)^3}}{2\pi(2 + \psi^2)}.$$

Für $\psi = 0$ oder im Pole C ist

$$\varrho = \frac{a}{4\pi} = 0{,}079577 \cdot a.$$

Am Ende der ersten Windung bei A ist $z = a$ oder $\psi = 2\pi$, daher der Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{a\sqrt{(1 + 4\pi^2)^3}}{\pi(1 + 2\pi^2)} = 2{,}8138758 \cdot a.$$

§. 62.

Aufgabe. Den Inhalt des Flächenraums zu finden, welcher zwischen dem Bogen CVN der archimedischen Spirallinie, Figur 28., und der Sehne CN liegt. Taf. III. Fig. 28.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnungen im vorigen §. sei F der gesuchte Flächeninhalt, so ist

$$\partial F = \frac{1}{2} z^2 \partial \psi = \frac{1}{2} z^2 \cdot \frac{2\pi \partial z}{a}, \text{ daher}$$

$$\text{(I) } F = \frac{\pi}{a} \int z^2 \partial z = \frac{\pi z^3}{3a}$$

wo keine Constante hinzukommt, weil F mit z zugleich verschwindet.

Für die Fläche CVNWBC, welche von der ersten Windung und dem Halbmesser BC = a begrenzt wird, ist z = a, also

$$\text{(II) } F = \frac{1}{3} \pi a^2$$

oder die Fläche, welche von der ersten Windung und dem Halbmesser des Grundkreises begrenzt wird, ist dem dritten Theile vom Inhalte des Grundkreises gleich.

Sucht man den Inhalt derjenigen Fläche, welche zwischen den zusammengehörigen Bogen CVN, BV′N′ zweier auf einander folgenden Windungen und den graden Linien CB und NN′ enthalten ist, so sei mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung CN′ = z', die Fläche CVNN′V′BC = F'; die Fläche CN′V′BC = F'', so ist

$$F' = F'' - F.$$

Aber $\partial F'' = \frac{1}{2} z' z' \partial \psi = \frac{1}{2} z' z' \cdot \frac{2\pi \partial z'}{a}$, daher

$$F'' = \frac{\pi}{a} \int z' z' \partial z' = \frac{\pi z' z' z'}{3a} + \text{Const.}$$

Für $z' = a$ wird $F'' = 0$, also $Const = -\frac{\pi a^3}{3a}$, daher
$$F'' = \frac{\pi}{3a}(z'z'z' - a^3) = \frac{\pi}{3a}[(a+z)^3 - a^3]$$
weil $z' = a + z$ ist. Aber $F = \frac{1}{3}\pi a^2 = \frac{\pi}{3a} \cdot a^3$, daher findet man $F' = F'' - F$ oder die Fläche $CVNN'V'BC$.
$$\text{(III)}\ F' = \frac{\pi}{3a}[(a+z)^3 - 2a^3].$$

Für $z = a$ erhält man die ganze Fläche, welche zwischen der ersten und zweiten Windung enthalten, und durch BC und die Verlängerung von CB begrenzt wird, oder
$$\text{(IV)}\ F' = 2\pi a^2.$$

II. Von den parabolischen Spirallinien.

§. 63.

Die verschiedenen Gattungen der parabolischen Spirallinien hängen von der Ordnung der Parabel ab, welche als Erzeugungslinie angenommen wird, dabei hat aber jede Gattung wieder verschiedene Arten, welche durch die Lage der Erzeugungslinie gegen die Axe der Spirallinie bestimmt werden.

Zu den parabolischen Spirallinien erster Gattung kann man diejenigen rechnen, bei welchen die erzeugende Linie eine gemeine oder apollonische Parabel ist, daher die entstandene Spirallinie auch eine gemeine parabolische genannt werden kann.

Unter den gemeinen parabolischen Spirallinien erster Art werden hier diejenigen verstanden, bei welchen die

Axe der Spirallinie Tangente vom Scheitel der Parabel ist, und unter diesen Linien zweiter Art versteht man diejenigen, wo die Axe der Spirallinie mit der Parabelaxe zusammenfällt. Nur diese Linien wird man hier untersuchen.

§. 64.

Aufgabe. Die Gleichung für die gemeinen parabolischen Spirallinien erster Art zu finden.

Auflösung. Es sei, Figur 30., CP die Axe der Spirallinie, welche die gemeine Parabel KAQ im Scheitel bei A berühret. Ist nun $CA = a$, $AB' = b$ und $B'D = B'D' = c$, so daß b, c bekannte Koordinaten der Erzeugungslinie sind, so kann für jeden Werth $PQ = u$ und $CP = z$ der zugehörige Punkt N in der Spirallinie gefunden werden, wenn ψ den zu u gehörigen Bogen des Grundkreises bezeichnet. Denn es verhält sich §. 55. Taf. III. Fig. 30. a b c

$$b : u = 2\pi : \psi.$$

Nimmt man daher den Bogen $AM = \psi = \frac{2\pi u}{b}$ (indem man den Halbmesser dieses Bogens = 1 setzt), zieht durch M die Linie CM, und trägt auf die Verlängerung derselben $CN = CP$, so ist N der gesuchte Punkt.

Für $P'Q' = u$ findet man auf ähnliche Art den Punkt N'.

Nun verhält sich bei der Parabel

$$AB' : AQ'' = (B'D')^2 : (Q''Q)^2 \quad \text{oder}$$
$$AB' : PQ = (B'D')^2 : (CP - CA)^2, \text{ daher}$$
$$b : u = c^2 : (z - a)^2.$$

Eben so verhält sich

$AB' : P'Q' = (B'D)^2 : (Q''Q')^2$ oder

$b : u = c^2 : (a - z)^2$.

Aus beiden Proportionen findet man

$z = a \pm c \sqrt{\frac{u}{b}}$. Weil aber $\frac{u}{b} = \frac{\psi}{2\pi}$ ist, so erhält man hieraus die allgemeine Gleichung

$$\text{(I)} \quad z = a \pm c \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}},$$

so daß für jeden Bogen ψ zwei Polarabstände oder zwei Punkte in der Spirallinie gefunden werden. Nur für $\psi = 0$ erhält z den einzigen Werth $= a$.

Taf. IV. Fig. 31. Für $c = a$ wird $B'D = CA$, Figur 30., oder der Punkt D fällt mit K zusammen, wie Figur 31. In diesem Falle erhält man für den Polarabstand die besondere Gleichung

$$\text{(II)} \quad z = a \left(1 \pm \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}}\right).$$

Fig. 32. Fällt hingegen der Scheitel A in den Pol C, wie Figur 32., so wird $a = 0$, und man erhält für diesen Fall die sehr einfache Gleichung

$$\text{(III)} \quad z = \pm c \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}} \text{ oder } z^2 = \frac{c^2 \psi}{2\pi},$$

wo für $\psi = 0$ auch $z = 0$ wird. Bei dieser Spirale verhalten sich die Quadrate der Polarabstände wie die zugehörigen Bogen des Grundkreises, oder die Polarabstände sind Ordinaten einer Parabel, deren Abscissen durch ψ, und deren Parameter durch $\frac{c^2}{2\pi}$ ausgedrückt wird.

§. 65.

Für irgend einen Bogen ψ ist der Polarabstand $z = a \pm c \sqrt{\frac{\psi}{2\pi}}$. Wächst nun ψ um 2π, und der

dazu gehörige Polarabstand ist z', so fällt z mit z' zusammen, und $z' - z$ ist der Abstand zweier auf einander folgenden Windungen der Spirallinie auf einerlei verlängerten Halbmesser des Grundkreises gemessen.

Nun ist $z' = a \pm c \sqrt{\frac{\psi + 2\pi}{2\pi}}$, daher der Abstand

$$z' - z = \frac{c}{\sqrt{2\pi}} [\pm \sqrt{(\psi + 2\pi)} \mp \sqrt{\psi}]$$

Für $\psi = \infty$ wird dieser Abstand $= 0$, daher verschwindet die Differenz der Polarabstände, oder die Windungen fallen in einander, wenn die Spirallinie unzählig viele Windungen gemacht hat.

§. 66.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für die gemeine parabolische Spirallinie erster Art zu finden.

Auflösung. Es sei NT, Figur 30., die zum Punkte N gehörige Tangente, $CN = z$, der dazu gehö- Bogen des Grundkreises $AM = \psi$, und der gesuchte Winkel $CNT = \omega$. Wächst nun ψ um $Mm = \partial\psi$, und man zieht No senkrecht auf Cn, so ist $on = \partial z$ und $No = z\partial\psi$. Ferner ist §. 64. (I) Taf. III. Fig. 30.

$$(z - a)^2 = z^2 - 2az + a^2 = \frac{c^2\psi}{2\pi}, \text{ daher}$$

$$2z\partial z - 2a\partial z = \frac{c^2\partial\psi}{2\pi}, \text{ also } \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{4\pi(z-a)}{c^2}.$$

Nun ist $\text{tgt}\,\omega = \frac{No}{on} = \frac{z\partial\psi}{\partial z}$, daher findet man

$$\text{(I) } \text{tgt}\,\omega = \frac{4\pi(z-a)z}{c^2}.$$

Für $a = 0$, oder wenn der Scheitel der Erzeugungslinie in den Pol fällt, ist

$$\text{(II) } \text{tgt}\,\omega = \frac{4\pi z^2}{c^2}.$$

§. 67.

Aufgabe. Den Bogen für die gemeine parabolische Spirallinie erster Art zu finden.

Auflösung. Für denjenigen Punkt der Spirallinie, welcher in den Pol fällt, sei der Bogen ψ des Grundkreises $= 0$, so ist hier $z^2 = \frac{c^2 \psi}{2\pi}$, daher

$$\partial \psi = \frac{4 \pi z}{c^2} \partial z.$$

Taf. IV. Fig. 32. Setzt man den Bogen CWN $= v$, Figur 32., so findet man wie §. 60.

$\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2 \partial \psi^2)}$, oder es ist, wenn statt $\partial \psi$ der gefundene Werth gesetzt wird,

$$\partial v = \frac{\partial z}{c^2} \sqrt{(c^4 + 16 \pi^2 z^4)}$$

wovon das Integral nur durch Reihen bestimmt werden kann.

§. 68.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für die gemeine parabolische Spirallinie erster Art zu finden.

Auflösung. Für den Fall, daß der Bogen ψ des Grundkreises mit dem Polarabstande z zugleich verschwindet, setze man, Figur 32., für den Punkt N, CR $= x$ und RN $= y$, so erhält man wie §. 61.

$\partial x = - \partial z . \cos \psi + z \partial \psi . \sin \psi$

$\partial y = \partial z . \sin \psi + z \partial \psi . \cos \psi$

und hieraus, wenn $\partial \psi$ constant angenommen wird,

$\partial^2 x = 2 \partial z \partial \psi . \sin \psi - \partial^2 z . \cos \psi + z \partial \psi^2 . \cos \psi$

$\partial^2 y = 2 \partial z \partial \psi . \cos \psi + \partial^2 z . \sin \psi - z \partial \psi^2 . \sin \psi$,

daher

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = 2 \partial z^2 \partial \psi - z \partial^2 z \partial \psi + z^2 \partial \psi^3$.

Nun ist $z^2 = \frac{c^2\psi}{2\pi}$, also $\partial z = \frac{c^2\,\partial\psi}{4\pi z}$ und

$$\partial^2 z = -\frac{c^2\,\partial\psi\,\partial z}{4\pi z^2} = -\frac{\partial z^2}{z}$$

$$\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y = \frac{4\pi z\,\partial z^3}{c^6}\,(3c^4 + 16\pi^2 z^4).$$

Es ist aber nach §. 67.

$$\partial v = \frac{\partial z}{c^2}\,\sqrt{(c^4 + 16\pi^2 z^4)},$$

daher, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\,\partial^2 x - \partial x\,\partial^2 y} \text{ oder}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{(c^4 + 16\pi^2 z^4)^3}}{4\pi z\,(3c^4 + 16\pi^2 z^4)}.$$

§. 69.

Aufgabe. Den Inhalt derjenigen Fläche zu finden, welcher von dem Bogen AWN, Figur 30., der gemeinen parabolischen Spirale erster Art und den Halbmessern AC und CN eingeschlossen ist. Taf. III. Fig. 30.

Auflösung. Man setze die Fläche ACNWA = F, so ist $\partial F = \frac{1}{2}z^2\,\partial\psi$, oder es ist, wenn aus §. 67. statt $\partial\psi$ sein Werth gesetzt wird,

$$\partial F = \tfrac{1}{2}z^2 \cdot \frac{4\pi(z-a)}{c^2}\,\partial z = \frac{2\pi}{c^2}\,(z^3 - az^2)\,\partial z, \text{ also}$$

$$F = \frac{2\pi}{c^2}\int(z^3 - az^2)\,\partial z = \frac{2\pi}{c^2}\,(\tfrac{1}{4}z^4 - \tfrac{1}{3}az^3) + \text{Const}.$$

Für $z = a$ wird $F = 0$, also Const $= \frac{1}{12}\cdot\frac{2\pi a^4}{c^2}$, daher ist die gesuchte Fläche

$$F = \frac{\pi}{6c^2}\,(3z^4 - 4az^3 + a^4).$$

§. 70.

Aufgabe. Eine Gleichung für die gemeine parabolische Spirallinie zweiter Art zu finden.

Taf. IV. Fig. 33. Auflösung. Es sei C, Figur 33., der Pol, und CP′ die Axe der Spirallinie, in welche zugleich die Axe der Parabel AQ′ fällt. Ferner sei $CB = a$, $BB' = b$, $CA = c$, und für den Grundkreis der Bogen $BM = \psi$, dessen Halbmesser $= 1$ ist, so erhält man für irgend einen Werth $PQ = u$ den zugehörigen Punkt N der Spirallinie auf die bekannte Weise, wenn man $BM = \psi = \frac{2\pi u}{b}$ bestimmt, und $CP = z$ auf CM aus C nach N trägt. Jeder andere Punkt N′ wird auf eine ähnliche Art gefunden. Nun verhält sich nach den Eigenschaften der Parabel

$$(BB')^2 : (PQ)^2 = AB : AP \text{ oder}$$
$$(BB')^2 : (PQ)^2 = CB - CA : CP - CA, \text{ daher}$$
$$b^2 : u^2 = a - c : z - c.$$

Eben so verhält sich

$$(BB')^2 : (P'Q')^2 = AB : AP'$$
$$b^2 : u^2 = a - c : z - c$$

es ist daher $u^2 = \frac{b^2 (z - c)}{a - c}$. Aber $u = \frac{b\psi}{2\pi}$ oder $u^2 = \frac{b^2 \psi^2}{4\pi^2}$, daher

$$\frac{b^2 (z - c)}{a - c} = \frac{b^2 \psi^2}{4\pi^2}, \text{ und hieraus}$$

$$\text{(I) } z = c + \frac{(a - c)\psi^2}{4\pi^2}.$$

Fällt der Scheitel A der Parabel in den Pol C, wie Fig. 34. Figur 34., so wird $c = 0$. Daher ist in diesem Falle

$$\text{(II) } z = \frac{a\psi^2}{4\pi^2},$$

wo mit $\psi = 0$ auch $z = 0$ wird.

§. 71.

Sind z und z′ die Polarabstände zweier auf einander folgenden Windungen, so daß z und z′ in einerlei Halbmesser des Grundkreises fallen, so ist für

$$z = c + \frac{(a-c)\,\psi^2}{4\pi^2},\quad z' = c + \frac{(a-c)(\psi+2\pi)^2}{4\pi^2},$$

daher der Abstand zweier auf einander folgenden Windungen, oder

$$z' - z = \frac{a-c}{\pi}\,(\psi + \pi).$$

Diese Abstände wachsen also mit dem Polarwinkel ψ.

§. 72.

Aufgabe. Die Lage der Tangente bei einer gemeinen parabolischen Spirallinie zweiter Art zu finden.

Auflösung. Für den Punkt N, Figur 33., sei NT die gesuchte Tangente, welche mit dem Polarabstand CN = z den Winkel CNT = ω einschließt. Wächst nun ψ um Mm = $\partial\psi$, so ist, wie §. 59., on = ∂z und No = $z\partial\psi$, daher wird Taf. IV. Fig. 33.

$$\operatorname{tgt}\omega = \frac{No}{on} = \frac{z\partial\psi}{\partial z}.$$

Nun erhält man, wenn die Gleichung (I) §. 70. differenziirt wird,

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{2\pi^2}{(a-c)\,\psi}$$ oder weil $\psi = 2\pi\sqrt{\frac{z-c}{a-c}}$ ist,

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\pi}{\sqrt{[(a-c)\,(z-c)]}},$$ daher

$$\text{(I)}\quad \operatorname{tgt}\omega = \frac{\pi z}{\sqrt{[(a-c)(z-c)]}} = \frac{4\pi^2 c + (a-c)\,\psi^2}{2\,(a-c)\,\psi}.$$

Für c = 0 wird

$$\text{(II)}\quad \operatorname{tgt}\omega = \pi\sqrt{\frac{z}{a}} = \tfrac{1}{2}\psi.$$

§. 73.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der gemeinen parabolischen Spirallinie zweiter Art zu finden.

Auflösung. Soll der gesuchte Bogen mit $\psi = 0$ verschwinden, so muß die Gleichung $z = \frac{a\psi^2}{4\pi^2}$ zur Grundlage dienen, alsdann ist

$$\frac{\partial z}{\partial \psi} = \frac{a\psi}{2\pi^2}, \text{ also } \frac{\partial z^2}{\partial \psi^2} = \frac{a^2\psi^2}{4\pi^4} = \frac{az}{\pi^2}.$$

Man setze, Figur 34., den Bogen AN $= v$, so ist, wie §. 60.,

$\partial v = \sqrt{(\partial z^2 + z^2 \partial \psi^2)}$, oder, wenn statt $\partial \psi^2$ der gefundene Werth gesetzt wird,

$\partial v = \partial z \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a} z\right)}$, daher

$v = \int \partial z \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a} z\right)} = \frac{2a}{3\pi^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a} z\right)^3} + \text{Const.}$

Für $z = 0$ wird $v = 0$, also Const. $= -\frac{2a}{3\pi^2}$, daher ist der gesuchte Bogen

$v = \frac{2a}{3\pi^2}\left[\left(1 + \frac{\pi^2 z}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{2a}{3\pi^2}\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{4}\psi^2\right)^3} - 1\right].$

Für $z = a$ oder $\psi = 2\pi$, also für die erste Windung, wird

$$v = \frac{2a}{3\pi^2}\left[\sqrt{(1 + \pi^2)^3} - 1\right].$$

§. 74.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für die gemeine parabolische Spirallinie zweiter Art zu finden.

Auflösung. In der Voraussetzung, daß z mit ψ zugleich verschwinde, bezeichne man die zum Punkte N,
Taf. IV. Fig. 34. Figur 34., gehörigen rechtwinklichten Koordinaten durch

x, y, so ist, wie §. 68., wenn $\partial\psi$ constant angenommen wird

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = 2\partial z^2\partial\psi - z\partial^2 z\partial\psi + z^2\partial\psi^3.$$

Aber $z = \frac{a\psi^2}{4\pi^2}$, daher $\partial z = \frac{a\psi\partial\psi}{2\pi^2}$ und $\partial^2 z = \frac{a\partial\psi^2}{2\pi^2}$.

Ferner ist $\partial z^2 = \frac{a^2\psi^2\partial\psi^2}{4\pi^4} = \frac{az\partial\psi^2}{\pi^2}$, daher

$$\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y = \frac{z\partial\psi^3}{2\pi^2}(3a + 2\pi^2 z)$$

und weil §. 73.

$$\partial v = \partial z\sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2}{a}z\right)} = \frac{\partial\psi\sqrt{az}}{\pi}\sqrt{\left(1 + \frac{\pi^2 z}{a}\right)} = \frac{\partial\psi}{\pi}\sqrt{(az + \pi^2 z^2)},$$

so erhält man, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y\partial^2 x - \partial x\partial^2 y}, \text{ oder}$$

$$\varrho = \frac{2\sqrt{(az + \pi z^2)^3}}{\pi z(3a + 2\pi^2 z)},$$

und für $z = a$

$$\varrho = \frac{2a\sqrt{(1 + \pi^2)^3}}{\pi(3 + 2\pi^2)}.$$

§. 75.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche zu finden, welche von dem Bogen AWN, Figur 33., der gemeinen parabolischen Spirallinie zweiter Art, und den Halbmessern CA und CN eingeschlossen wird. Taf. IV. Fig. 33.

Auflösung. Man setze die Fläche ACNWA $=$ F, so ist $\partial F = \frac{1}{2}z^2\partial\psi$, oder weil §. 72.

$\partial\psi = \frac{\pi\partial z}{\sqrt{(a-c)}\sqrt{(z-c)}}$ ist, so findet man

$F = \frac{\pi}{2\sqrt{(a-c)}}\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(z-c)}}$, oder wenn $z - c = w$ gesetzt wird

$$\int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(z-c)}} = \int (w^{\frac{3}{2}} + 2cw^{\frac{1}{2}} + c^2 w^{-\frac{1}{2}}) \partial w$$

$$= \tfrac{2}{5} w^{\frac{5}{2}} + \tfrac{4}{3} c w^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{2} c^2 w^{\frac{1}{2}}$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $z = c$ auch w und F verschwindet. Man erhält daher

(I) $F = \frac{\pi}{60} (12z^2 + 16cz - 13c^2) \sqrt{\frac{z-c}{a-c}}$.

Für $c = 0$ wird

(II) $F = \frac{1}{5} \pi z^2 \sqrt{\frac{z}{a}}$,

also für $z = a$; diese Fläche $= \frac{1}{5} \pi a^2$.

III. Von der hyperbolischen Spirallinie.

§. 76.

So wie es verschiedene Gattungen der parabolischen Spirallinien giebt, eben so kann man die hyperbolischen, bei welchen die Erzeugungslinie ein Hyperbel ist, in verschiedene Gattungen, und nach der Lage dieser Erzeugungslinie noch in besondere Arten eintheilen. Hier wird lediglich von derjenigen hyperbolischen Spirallinie die Rede
Taf. IV. seyn, bei welcher die senkrechten Halbmesser CA, CA',
Fig. 35. Figur 35., Asymptoten einer gemeinen gleichseitigen Hyperbel QBQ' sind, und man wird die erzeugte Spirallinie zur Unterscheidung von den übrigen die gemeine hyperbolische Spirallinie nennen.

Sobald $CA = a$ und $AB' = b$ gegeben sind, so läßt sich nach §. 55. die Spirallinie N'NAY aus den Werthen $PQ = u$ und $CP = z$ leicht beschreiben. Nun verhält sich bei der gleichseitigen Hyperbel

$AB' : PQ = CP : CA$, oder
$b : u = z : a$, daher ist

$$u = \frac{ab}{z}.$$

Für den Punkt N der Spirallinie ist der Bogen des Grundkreises $AXM = \psi$, und §. 55.

$$u = \frac{b\psi}{2\pi},$$

daher findet man die Gleichung für die Polarabstände der gemeinen hyperbolischen Spirallinie

$$z = \frac{2\pi a}{\psi}.$$

Es verhalten sich also die Polarabstände z umgekehrt, wie die zugehörigen Bogen des Grundkreises, daher man diese Linie auch eine umgekehrte archimedische Spirallinie nennt.

Für $\psi = 0$ wird $z = \infty$.

Für $\psi = 2\pi$ wird $z = a$,

und für $\psi = 4\pi;\ 6\pi;\ 8\pi;\ 10\pi;\ \ldots$

wird $z = \frac{1}{2}a;\ \frac{1}{3}a;\ \frac{1}{4}a;\ \frac{1}{5}a;\ \ldots$

Für $z = 0$ wird $\psi = \infty$, es muß daher die Spirallinie unzählig viel Windungen um den Pol machen, bevor sie ihn erreichen kann.

§. 77.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für die gemeine hyperbolische Spirallinie zu finden.

Auflösung. Für den Punkt N, Figur 35., sei NT die Tangente, und der Winkel $CNT = \omega$. Wächst nun der Bogen $AXM = \psi$ um $Mm = \partial\psi$, so ist Nn der zugehörige Zuwachs des Spiralbogens, und wenn Taf. IV. Fig. 35.

no senkrecht auf Cn gezogen wird, $No = \partial z$ und $no = z \partial \psi$, daher

$$\text{tgt } nNo = \frac{no}{No} = \frac{z \partial \psi}{\partial z}.$$

Aber $nNo = 180^\circ - \omega$, also

$$\text{tgt } nNo = \text{tgt}\,(180^\circ - \omega) = - \text{tgt } \omega.$$

Ferner erhält man, weil $z \psi = 2 \pi a$,

$z \partial \psi + \psi \partial z = 0$, also $\frac{z \partial \psi}{\partial z} = - \psi$, folglich

$\text{tgt } nNo = - \text{tgt } \omega = - \psi$, oder

$$\text{tgt } \omega = \psi = \frac{2 \pi a}{z}.$$

§. 78.

Aufgabe. Die Länge des Bogens der gemeinen hyperbolischen Spirallinie zu finden.

Auflösung. Weil für $\psi = 0$, $z = \infty$ wird, so muß auch in diesem Falle der zugehörige Spiralbogen unendlich groß werden. Zur leichteren Bestimmung der Bogenlängen setze man in dem Grundkreise den Bogen $AA'M = \psi'$, so ist, weil $AXM = \psi$,

$$\psi = 2 \pi - \psi', \text{ folglich}$$

$$z = \frac{2 \pi a}{2 \pi - \psi'}.$$

Setzt man nun den Spiralbogen $AZN = v'$, so ist, wenn ψ' um $Mm' = \partial \psi'$ wächst, $Nn' = \partial v'$. Aber $No' = z \partial \psi'$ und $o'n' = \partial z$, daher

$$Nn' = \partial v' = \sqrt{(z^2 \partial \psi'^2 + \partial z^2)}.$$

Nun ist $2 \pi z - z \psi' = 2 \pi a$, also

$2 \pi \partial z - \psi' \partial z - z \partial \psi' = 0$, daher

$z \partial \psi' = (2 \pi - \psi')\, \partial z = \frac{2 \pi a \partial z}{z}$, folglich

$\partial v'$

$\partial v' = \partial z \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 a^2}{z^2} + 1\right)} = \frac{\partial z}{z} \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}$ oder

$\partial v' = \frac{(4\pi^2 a^2 + z^2)\partial z}{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} = \frac{z\partial z}{\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} + \frac{4\pi^2 a^2 \partial z}{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}$

Es ist aber $\int \frac{z\partial z}{\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} = \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} + \text{Const.}$ und P. A. S. 161. III.

$\int \frac{\partial z}{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}} = -\frac{1}{2\pi a} \log n \frac{2\pi a + \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}{z} + \text{Const.},$

daher

$v' = \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} - 2\pi a \log n \frac{2\pi a + \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}{z} + \text{Const.}$

Für $z = a$ wird $v' = 0$, also

$\text{Const.} = -a\sqrt{(4\pi^2 + 1)} + 2\pi a \log n [2\pi + \sqrt{(4\pi^2 + 1)}],$

folglich ist der Bogen AZN, oder

$v' = \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)} - a\sqrt{(4\pi^2 + 1)} + 2\pi a \log n \frac{2\pi z + z\sqrt{(4\pi^2 + 1)}}{2\pi a + \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}}.$

§. 79.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für die gemeine hyperbolische Spirallinie zu finden.

Auflösung. Mit Beibehaltung der Bezeichnung im vorigen §. erhält man wie §. 68.

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = 2\partial z^2 \partial \psi' - z\partial^2 z \partial \psi' + z^2 \partial \psi'^3.$

Nun ist nach §. 78.

$\partial \psi' = \frac{2\pi a \partial z}{z^2}$, und weil $\partial \psi'$ constant ist,

$\partial^2 z = \frac{z\partial z \partial \psi'}{\pi a} = \frac{2\partial z^2}{z}$, daher

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = \frac{8\pi^3 a^3 \partial z^3}{z^4}$. Aber §. 78.

$\partial v' = \frac{\partial z}{z} \sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)}$, daher ist, wenn ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet,

$$\varrho = \frac{\partial v'^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}, \text{ folglich}$$

$$\varrho = \frac{z\sqrt{(4\pi^2 a^2 + z^2)^3}}{8\pi^3 a^3}.$$

§. 80.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ACNZA, Fi-
Taf. IV. gur 35., zu finden, welche von der gemeinen hyperboli-
Fig. 35. schen Spirallinie und den Halbmessern AC, CN begrenzt wird.

Auflösung. Man setze die Fläche $ACNZA = F'$, so ist $\partial F' = \frac{1}{2} z^2 \partial \psi'$, oder weil §. 79.
$\partial \psi' = \frac{2\pi a \partial z}{z^2}$, so wird $\partial F' = \pi a \partial z$, folglich $F' = \pi a z + \text{Const.}$ Für $z = a$ wird $F' = 0$, also $\text{Const.} = -\pi a^2$, daher findet man die Fläche

$$F' = \pi a (z - a).$$

IV. Von der logarithmischen Spirallinie.

§. 81.

Unter den verschiedenen logarithmischen Spirallinien wird hier nur diejenige untersucht werden, bei welcher die Erzeugungslinie eine gewöhnliche logarithmische Linie
Fig. 36. $B'AQ'$, Figur 36., eine solche Lage gegen die Axe BC der Spirallinie hat, daß die im Pole C auf BC senkrechte Linie EK die Asymptote der logarithmischen Linie, und zugleich die Abscissenaxe für den Anfangspunkt C ist. Wird nun $CA = 1$, $CB = a$ und $BB' = b$ gesetzt, so kann für jeden Werth $PQ = u$ nach §. 55. der zugehörige Punkt N der Spirallinie gefunden werden, indem man mit dem Halbmesser CA den Bogen $AM = \psi$ des Grundkreises beschreibt, und

$$\psi = \frac{2\pi u}{b}$$

nimmt, woraus sich $CN = CP = z$ findet. Um die

Gleichung für diese Spirallinie anzugeben, setze man, daß Q Q′ nach §. 48. IV. eine logarithmische Linie sei, bei welcher sich alsdann die Abscissen (C Q″) wie die Logarithmen der Ordinaten (Q″Q) verhalten. Also

$$CE : CQ'' = \log EB' : \log Q''Q \text{ oder}$$

$$b : u = \log a : \log z \text{ daher}$$

$$\log z = \frac{u \log a}{b}, \text{ oder}$$

$u = \frac{b\psi}{2\pi} = \frac{b \log z}{\log a}$, folglich erhält man die Gleichung für die gemeine logarithmische Spirallinie

$$\log z = \frac{\psi \log a}{2\pi},$$

wo sich die angedeuteten Logarithmen auf einerlei logarithmisches System oder auf eine gemeinschaftliche Grundzahl beziehen müssen. Uebrigens verhalten sich bei dieser Spirallinie die Polarwinkel wie die Logarithmen der zugehörigen Polarabstände.

Für $\psi = 0$ wird $\log z = 0$, also $z = 1 = CA$.

Ist ψ negativ, so wird z kleiner als 1, und für $\psi = -\infty$ wird $z = 0$, daher macht die Spirallinie von A ab unzählig viele Windungen, bis sie den Pol C erreicht.

§. 82.

Für zwei auf einander folgende Windungen, deren Polarabstände z, z′ in einerlei Verlängerung des Halbmessers vom Grundkreise fallen, sei

$\log z = \frac{\log a}{2\pi}\psi$, so ist $\log z' = \frac{\log a}{2\pi}(\psi + 2\pi)$,

also $\log z' - \log z = \log a$ oder $\log \frac{z'}{z} = \log a$,

daher $\frac{z'}{z} = a$.

Das Verhältniß zweier Polarabstände für auf einander folgende Windungen ist daher durchgängig unveränderlich.

Bezeichnen daher z, z', z'', z''', ... die auf einander folgenden Polarabstände, welche auf einerlei Linie gemessen werden, so verhält sich

$$z : z' = 1 : a$$
$$z' : z'' = 1 : a$$
$$z'' : z''' = 1 : a \text{ u. s. w., daher}$$

$z : z' = 1 : a$; $z : z'' = 1 : a^2$; $z : z''' = 1 : a^3$ u. s. w.; und hieraus erhält man

$z' = az$; $z'' = a^2 z$; $z''' = a^3 z$; $z'''' = a^4 z$ u. s. w.; die auf einerlei Linie gemessenen Polarabstände bilden daher eine geometrische Reihe, deren Exponent $\frac{1}{a}$ ist.

§. 83.

Aufgabe. Die Lage der Tangente für die logarithmische Spirallinie zu finden.

Auflösung. Der Winkel, welchen die Tangente
Taf. IV. Fig. 36. NT, Figur 36., mit dem Polarabstand NC einschließt, sei ω, so ist, wie §. 66., $\operatorname{tgt}\omega = \frac{z\,\partial\psi}{\partial z}$. Aus der Gleichung des vorhergehenden §. erhält man aber

$$\partial \log z = m\,\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial\psi \, . \log a}{2\pi} \text{ (P. A. S. 56.)}$$

wo m die Subtangente der logarithmischen Linie, oder den Model desjenigen logarithmischen Systems bezeichnet, auf welches sich die logarithmische Linie bezieht. Für die natürlichen Logarithmen ist $m = 1$, und für die gemeinen oder briggischen ist $m = 0{,}43429448$.

Man erhält daher $\frac{z\,\partial\psi}{\partial z} = \frac{2\pi m}{\log a}$, folglich

$$\text{tgt}\ \omega = \frac{2\pi m}{\log a}.$$

Der Winkel, welchen die Tangente mit dem Polarabstande einschließt, ist daher für alle Punkte der Spirallinie gleich groß. Für die briggischen Logarithmen wird

$$2\pi m = 2,7287527.$$

§. 84.

Aufgabe. Die Gleichung für diejenige Spirallinie zu finden, bei welcher die Tangente mit dem Polarabstande durchgängig einen Winkel von 30 Grad einschließt.

Auflösung. Weil $\text{tgt}\ \omega = \frac{2\pi m}{\log a}$ und $\text{tgt}\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$, so erhält man $\frac{2\pi m}{\log a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, oder $\log a = 2\pi m \sqrt{3}$, daher §. 81.

$$\log z = \frac{\psi \log a}{2\pi} = m\psi\sqrt{3}.$$

Für die natürlichen Logarithmen ist $m = 1$, also

$$\text{logn}\ z = \psi\sqrt{3},$$

und für die briggischen

$$\log z = 0,7522201\ \psi,\ \text{oder auch}$$

$$\log z = 4,7262649\ \frac{\psi}{2\pi}.$$

Bedeutet ψ° die Anzahl der Grade, welche dem Bogen ψ entsprechen, so ist $\frac{\psi^\circ}{360} = \frac{\psi}{2\pi}$, und man kann hienach folgende Tafel für verschiedene Werthe von ψ° berechnen.

ψ°	z	ψ°	z
0°	1,0000	65°	7,1345
5°	1,1632	70	8,2986
10	1,3530	75	9,6526
15	1,5737	80	11,2276
20	1,8305	85	13,0596
25	2,0939	90	15,1906
30	2,4766	95	17,6692
35	2,8814	100	20,5523
40	3,3508	105	23,9058
45	3,8975	110	27,8065
50	4,5335	115	32,3436
55	5,2732	120	37,6211
60	6,1336	125	43,7598

Mittelst dieser Tafel kann man für die Winkel ψ° die zugehörigen Werthe z auftragen, und eine logarithmische Spirale CNP, Figur 37., von der verlangten Eigenschaft zeichnen. Taf. IV. Fig. 37.

Stellt man sich vor, daß um den Pol C eine der CNP gleiche aber umgekehrt gezeichnete Spirallinie CNQ beweglich sei, so haben diese beide Linien die Eigenschaft, daß bei jedem Durchschnittspunkte N die Tangenten beider Spirallinien einander unter einem Winkel TNT′ von 60 Grad schneiden.

Anmerkung. Zum bessern Mahlen des Getreides verlangt man, daß sich die in die Mühlensteine gehauene Strahlen oder Hauschläge durchgängig unter einem Winkel von 60 Grad schneiden sollen. Dies

kann dadurch bewirkt werden, wenn man die hier beschriebene logarithmische Spirale auf ein ebenes Brett zeichnet, und danach eine Lehre (Chablone) verfertigt, nach welcher die Hauschläge bearbeitet werden können.

§. 85.

Aufgabe. Die Länge des Bogens für die gemeine logarithmische Spirallinie zu finden.

Auflösung. Man bezeichne die Länge des Bogens AN, Figur 36., durch v, so ist wie §. 60. Taf. IV. Fig. 36.

$\partial v = \surd(\partial z^2 + z^2 \partial \psi^2)$. Aber $\partial \psi = \frac{2\pi m \partial z}{z \log a}$, daher

$\partial v = \frac{\partial z}{\log a} \surd(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)$, also

$v = \frac{z}{\log a} \surd(\log a^2 + 4\pi^2 m^2) + \text{Const.}$

Für $\psi = 0$ wird $v = 0$ und $z = 1$, daher findet man die Länge des Bogens

$$v = \frac{z-1}{\log a} \surd(\log a^2 + 4\pi^2 m^2).$$

§. 86.

Aufgabe. Den Krümmungshalbmesser für die gemeine logarithmische Spirallinie zu finden.

Auflösung. Der gesuchte Krümmungshalbmesser für den Punkt N, Figur 36., sei $= \varrho$, so ist wie §. 68., wenn $\partial \psi$ constant gesetzt wird,

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = 2\partial z^2 \partial \psi - z \partial^2 z \partial \psi + z^2 \partial \psi^3$.

Nun ist ferner

$\partial z = \frac{z \partial \psi \log a}{2\pi m}$, also $\partial^2 z = \frac{\partial z \partial \psi \log a}{2\pi m} = \frac{\partial z^2}{z}$,

daher

$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = \frac{2\pi m}{z \log a^3} (\log a^2 + 4\pi^2 m^2) \partial z^3$.

Aber auch §. 85.

$$\partial v = \frac{\partial z}{\log a} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)},$$ daher erhält man, weil

$$\varrho = \frac{\partial v^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y},$$

den Krümmungshalbmesser

$$\varrho = \frac{z}{2\pi m} \sqrt{(\log a^2 + 4\pi^2 m^2)}.$$

§. 87.

Taf. IV. Fig. 36. Aufgabe. Den Inhalt der Fläche ACNA, Figur 36., zu finden, welche von dem Spiralbogen AN und den Halbmessern CA und CN eingeschlossen ist.

Auflösung. Man setze die Fläche ACNA = F, so ist

$$\partial F = \tfrac{1}{2} z^2 \partial \psi = \tfrac{1}{2} z^2 \frac{2\pi m \partial z}{z \log a}$$ (§. 85.), daher

$$F = \frac{\pi m}{\log a} \int z \partial z = \frac{\pi m}{2 \log a} z^2 + \text{Const.}$$

Für $z = 1$ wird $F = 0$, also $\text{Const.} = \frac{-\pi m}{2 \log a}$, daher die Fläche

$$F = \frac{\pi m}{2 \log a} (z^2 - 1).$$

Ueber die Eigenschaften der Spirallinien kann man nachsehen:

Varignon, Nouvelle formation de Spirales. Mém. de l'acad. de Paris. Année 1704. pag. 91 — 181. ed. bat.

Karsten angef. mathematische Analysis. S. 329 — 354.

Sechster Abschnitt.

Von der Kettenlinie.

§. 88.

Eine vollkommen biegsame aber unausdehnbare schwere Schnur oder aus äußerst kleinen Gliedern bestehende Kette sei in den Punkten B, D, Figur 38., aufgehängt, so bildet solche eine Kettenlinie (Catenaria, *Chainette*) BAD. Taf. V. Fig. 38.

Man ziehe zu irgend einem Punkte M derselben die Tangente Mt, so giebt diese Linie die Richtung an, nach welcher die Schnur im Punkte M gespannt wird, und eine Kraft T im Punkte M nach der Linie Mt angebracht, welche auf den Punkt M eben so, wie das Gewicht der Kette MAD auf die Schnur wirkt, heißt die Spannung im Punkte M. Brächte man die Kraft T nach der Richtung Mt an, so könnte man die Kette MAD wegnehmen, und die Spannung T würde mit der übrigbleibenden Kette MB im Gleichgewichte seyn; so wie nach Wegnahme der Kette BM die Kraft T nach der Richtung MT mit dem Stücke MAC von der Kette im Gleichgewichte wäre.

Es sei A der tiefste Punkt der Kette oder der Scheitel von der krummen Linie BAD, durch welchen die Vertikallinie AC gezogen ist. Ferner sei BC und MP auf AC senkrecht, $AP = x$, $PM = y$, das Gewicht des x y

V Bogens AM = V, seine Länge = v; so wird, wenn
v Taf. V. x um Pp = ∂x wächst, der Bogen AM um
Fig. 38. Mm = ∂v, und sein Gewicht um ∂V zunehmen. Die Tangenten, welche zu den Punkten M und m gehören, sollen durch die Linien Tt und T′t′ vorgestellt werden; ferner setze man den Winkel MTC = φ, ziehe RR′ in M auf T′t′ senkrecht, und Mq vertikal. Ist nun die Spannung in M = T, so ist solche in m = T + ∂T, und der Winkel φ für den Punkt m wird $\varphi + \partial\varphi$ = mT′C, also TMT′ = tMt′ = $\partial\varphi$. Statt der Kette MAD kann man in M die Kraft T nach der Richtung Mt, und statt der Kette mB in m oder M die Kraft T + ∂T nach der Richtung MT′ anbringen. Werden nun die Kettenstücke MAD und mB weggenommen, und statt derselben die Kräfte T und T + ∂T angebracht, so bleibt von der ganzen Kette nur noch das Element Mm übrig, dessen Gewicht ∂V man sich im Punkte M vereinigt vorstellen kann. Sofern nun die Kette vorher im Gleichgewichte war, so müssen auch noch die drei Kräfte T, T + ∂T und ∂V nach den Richtungen Mt, Mt′ und Mq am Punkte M im Gleichgewichte seyn.

Zerlegt man zuerst diese drei Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen Mt′ und MT′, und bemerkt, daß der Winkel tMt′ = $\partial\varphi$, also cos tMt′ = $\cos\partial\varphi = 1$, und daß der Winkel qMt′ = $90° - \varphi - \partial\varphi$, also cos qMt′ = $\cos(90° - \varphi - \partial\varphi) = \sin(\varphi + \partial\varphi)$ $= \sin\varphi\cos\partial\varphi + \cos\varphi\sin\partial\varphi = \sin\varphi + \partial\varphi\cos\varphi = \sin\varphi$ ist, weil $\partial\varphi\cos\varphi$ gegen $\sin\varphi$ verschwindet, so erhält man aus den beiden Kräften T und ∂V die Mittelkraft nach der Richtung Mt′ (§. 19. IV. des ersten Bandes) =

$T \cos t'Mt + \partial V \,.\, \cos qMt' = T + \partial V \,.\, \sin \varphi.$
Nach entgegengesetzter Richtung MT' wirkt $T + \partial T$, es muß daher

$T + \partial T = T + \partial V \,.\, \sin \varphi$ seyn, oder

$$\text{(I)}\ \partial T = \partial V \,.\, \sin \varphi.$$

Werden eben diese drei Kräfte T, $T + \partial T$ und ∂V nach den entgegengesetzten Richtungen MR und MR' senkrecht auf $T't'$ zerlegt, so erhält man

$T \sin \partial\varphi = \partial V \cos \varphi$, oder weil $\sin \partial\varphi = \partial\varphi$ ist,

$$\text{(II)}\ T\partial\varphi = \partial V \,.\, \cos \varphi,$$

Man multiplizire (I) mit $\cos \varphi$, und (II) mit $\sin \varphi$, ziehe die letzte Gleichung von der erstern ab, so wird

$$\partial T \,.\, \cos \varphi - T\partial\varphi \,.\, \sin \varphi = 0,$$

davon ist das Integral

$$T \cos \varphi + \text{Const.} = 0.$$

Für $\varphi = 0$ werde $T = C$, so ist C die Spannung c
im Scheitel A, und man erhält

$$C + \text{Const.} = 0, \text{ daher}$$

$$\text{(III)}\ T \cos \varphi = C.$$

Hienach ist $T = \frac{C}{\cos \varphi}$, und wenn dieser Werth in (II) statt T gesetzt wird, so ist

$$\frac{C\partial\varphi}{\cos \varphi^2} = \partial V,$$

hievon findet man das Integral

$$\text{(IV)}\ V = C \operatorname{tgt} \varphi,$$

wo keine Constante hinzukommt, weil mit $\varphi = 0$ auch $V = 0$ werden muß.

Ferner ist aus (III) $T = \frac{C}{\cos \varphi} = C \sqrt{(1 + \operatorname{tgt} \varphi^2)}$.
Aber $\operatorname{tgt} \varphi = \frac{V}{C}$ nach IV., daher erhält man, wenn

man diesen Werth mit tgt φ vertauscht,

$$\text{(V)}\ T = \sqrt{(C^2 + V^2)}.$$

Wird der Werth für C aus (III) in (IV) gesetzt, so erhält man $V = T \cos\varphi \operatorname{tgt}\varphi$, oder

$$\text{(VI)}\ V = T \sin\varphi.$$

§. 89.

Im Dreiecke Mmn verhält sich

$$1 : \operatorname{tgt}\varphi = mn : nM = \partial y : \partial x,$$

daher ist

$$\operatorname{tgt}\varphi = \frac{\partial x}{\partial y},$$

folglich (§. 88. IV.) wenn $\frac{V}{C}$ statt tgt φ gesetzt wird,

$$\text{(I)}\ C\partial x = V\partial y.$$

Ferner ist hienach $C^2\partial x^2 = V^2\partial y^2$, und wenn auf beiden Seiten $V^2\partial x^2$ addirt wird,

$$(C^2 + V^2)\partial x^2 = V^2(\partial x^2 + \partial y^2) = V^2\partial v^2$$

weil $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial v^2$ ist; oder

$$\text{(II)}\ \partial x = \frac{\pm V\partial v}{\sqrt{(C^2 + V^2)}}.$$

Nach (I) ist $\partial x = \frac{V\partial y}{C}$; diesen Werth in (II) gesetzt, giebt:

$$\text{(III)}\ \partial y = \frac{\pm C\partial v}{\sqrt{(C^2 + V^2)}},$$

welches die Fundamentalgleichungen für die Kettenlinie sind, zu deren Auflösung aber erfordert wird, daß vorher das Gesetz bekannt sei, nach welchem das Gewicht V auf dem Bogen v vertheilt ist. Auch wird bei diesen Gleichungen vorausgesetzt, daß die Stetigkeit der Kurve durch einzelne noch besonders angebrachte Gewichte nicht unterbrochen werde, weil in diesem Falle die Bestimmung der beständigen Größen abgeändert werden muß.

Wächst das Gewicht der Kette von A bis D nach eben dem Verhältnisse wie von A nach B, so gelten für den Bogen AD eben die Schlüsse, wie für den Bogen AB, und man erhält dieselben Folgen. Es muß daher in diesem Falle, wenn die Punkte B und D in einerlei Horizonte liegen, der Bogen AD dem Bogen AB gleich und ähnlich seyn.

Weil die ganze Kette BAD im Gleichgewichte ist, so muß solches auch noch bestehen, wenn irgend ein Punkt M′ befestigt, und das Kettenstück M′D weggenommen wird. In diesem Falle, wenn M′ mit M in einerlei Horizonte liegt, ist der Bogen AM′ dem Bogen AM gleich und ähnlich.

§. 90.

Statt des Kettenstücks MB, Figur 38., sei in M, nach der Richtung der Tangente MT, die Kraft T, welche der Spannung daselbst gleich ist, angebracht, so wird hiedurch das Gleichgewicht der Kette nicht unterbrochen, weil die Kraft T auf den Punkt M eben so, wie das Gewicht der Kette MAD wirkt. Statt der Kraft T lassen sich aber zwei andere ihr gleich wirkende Kräfte angeben, wovon die eine C′ nach horizontaler Richtung MC′, und die andere V′ nach vertikaler Richtung MV′ wirkt. Aus der Zerlegung der Kraft T nach diesen beiden Richtungen erhält man (§. 20. I. Band) Taf. V. Fig. 38.

$$C' = T \cos \varphi \text{ und } V' = T \sin \varphi.$$

Nach §. 88. III. ist aber $T \cos \varphi = C$, daher

$$(1)\ C' = C,$$

d. h. die Gewalt, mit welcher die Kette nach wagerechter Richtung auszuweichen strebt, ist in

allen Theilen derselben gleich groß, und der Spannung am Scheitel gleich.

Weil ferner nach §. 88. VI. das Gewicht $V = T \sin \varphi$ ist, so erhält man

$$(II)\ V' = V;$$

es ist daher die Gewalt, mit welcher die Kette in irgend einem Punkte nach vertikaler Richtung zu zerreißen strebt, eben so groß, als das Gewicht der Kette von diesem Punkte bis zum Scheitel gerechnet.

§. 91.

Denkt man sich eine Menge äußerst kurzer Kettenglieder oder kleine Gewölbsteine so auf einander gesetzt, daß
Taf. V. Fig. 39. solche den Bogen BAD, Figur 39., bilden, und sich einander im Gleichgewichte halten, vorausgesetzt, daß die Punkte B und D nicht weichen können, so läßt sich die Natur der krummen Linie BAD eben so wie §. 88. bestimmen. Man ziehe vom Scheitel A die Linie AC senkrecht auf die Horizontale BD, nehme $AP = x$, $PM = y$; ferner sei MT die zum Punkte M gehörige Tangente, und die Fuge M werde nach MT mit der Kraft T gepreßt, so muß für das Gleichgewicht der vom Bogen BM entstehende Druck nach Mt ebenfalls $= T$ seyn. Wächst nun $AM = v$ um $Mm = \partial v$, und das Gewicht des Bogens AM ist $= V$, so ist das Gewicht von $Mm = \partial V$, und T in m wird $= T + \partial T$. Werden nun die Kräfte T, $T + \partial T$ und ∂V nach den Richtungen $T't'$ und RR' senkrecht auf $T't'$ zerlegt, so findet man ebenfalls, wie §. 88., wenn der Winkel $CTM = \varphi$ gesetzt wird,

$$\partial T = \partial V . \sin \varphi, \text{ und}$$
$$T \partial \varphi = \partial V . \cos \varphi,$$

so daß auf eine ähnliche Art alle übrige Gleichungen entwickelt werden können. Es müssen daher auch alle diejenigen Sätze, welche von einer frei hängenden Kette erwiesen sind, von einem nach der Kettenlinie aufgerichteten Bogen mit unendlich kleinen Gewölbsteinen gelten.

Die gemeine Kettenlinie.

§. 92.

Wird angenommen, daß gleiche Theile des Bogens AM, Figur 38., gleiches Gewicht haben, und daß die Länge eines jeden Fußes von diesem Bogen g Pfund wiege, so ist $V = gv$. Ferner kann man sich die Spannung am Scheitel oder C durch das Gewicht einer Kette ausgedrückt denken, von welcher ebenfalls jeder Fuß g Pfund wiegt. Ist nun c die Länge einer solchen Kette, deren Gewicht C Pfund beträgt, so wird $C = cg$, daher §. 89. (II)

Taf. V. Fig. 38. g c

$$\partial x = \frac{g v \partial v}{\sqrt{(c^2 g^2 + g^2 v^2)}}, \text{ oder}$$
$$x = \int \frac{v \partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} = (c^2 + v^2) + \text{Const.}$$

Für $x = o$ wird $v = o$, also
$$o = c + \text{Const.}, \text{ daher}$$
$$x = \sqrt{(c^2 + v^2)} - c, \text{ und hieraus}$$
$$(\text{I.})\ v = \pm \sqrt{(2cx + x^2)},$$
die Länge v der Kettenlinie kann daher sehr leicht für jede gegebene Abscisse x gefunden werden, wenn c bekannt ist.

Nach §. 89. I. ist

$V \partial y = C \partial x$, also $g v \partial y = g c \partial x$ oder $v \partial y = c \partial x$, und wenn in (I) statt v der gefundene Werth $\frac{c \partial x}{\partial y}$ gesetzt wird

$$\pm \partial y \sqrt{(2cx + x^2)} = c \partial x, \text{ daher}$$

$$y = \pm \int \frac{c \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}.$$

Dies zu integriren, setze man

$$x + \sqrt{(2cx + x^2)} = z, \text{ so ist}$$

$$\frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{\sqrt{(2cx + x^2)}} \partial x = \partial z, \text{ oder}$$

$$\partial x = \frac{\partial z \sqrt{(2cx + x^2)}}{c + z}, \text{ daher}$$

$$y = \int \frac{c \partial z}{c + z} = c \operatorname{logn} (c + z) + \text{Const.}, \text{ oder}$$

$$y = c \operatorname{logn} [c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}] + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $y = 0$, also

Const. $= - c \operatorname{logn} c$, daher

$$\text{(II.)} \quad y = \pm c \operatorname{logn} \frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c}.$$

Es können daher aus den gegebenen Abscissen x die dazu gehörigen Ordinaten nur mittelst der natürlichen Logarithmen gefunden werden, wenn der Werth von C bekannt ist.

Soll aus y und c der Werth von x gefunden werden, so sei e die Grundzahl oder Basis der natürlichen Logarithmen. Nun ist für $y = \operatorname{logn} z$ auch $e^y = z$, oder weil

$$\frac{y}{c} = \operatorname{logn} \frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c},$$

so ist auch

$$e^{\frac{y}{c}} = \frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c}, \text{ folglich wenn man}$$

hieraus x entwickelt,

(III.)

$$(III)\ x = \tfrac{1}{2} c \left(e^{\frac{y}{c}} + e^{\frac{-y}{c}} - 2\right),$$

Wenn c nicht bekannt ist, und man will aus der Abscisse x und der Länge v des zugehörigen Bogens die Ordinate y finden, so erhält man aus (I)

$$c = \frac{v^2 - x^2}{2x},$$

wird dieser Werth in (II) statt c gesetzt, so erhält man nach gehöriger Abkürzung

$$(IV)\ y = \pm \frac{v^2 - x^2}{2x} \operatorname{logn} \frac{v + x}{v - x}.$$

Will man endlich eine Gleichung zwischen der Ordinate y und dem dazu gehörigen Bogen v suchen, so erhält man nach §. 89. III., wenn $V = vg$ und $C = cg$ gesetzt wird,

$$\partial y = \frac{\pm c \partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}}.$$

Dies zu integriren, sei $\sqrt{(c^2 + v^2)} = z - v$, so ist $\partial v = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c^2}{z^2}\right) \partial z$; $z - v = \frac{1}{2} z \left(1 + \frac{c^2}{z^2}\right)$, daher

$$y = \int \frac{c \partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} = \int \frac{c \partial z}{z} = c \operatorname{logn} z + \text{Const.},$$

oder

$$y = c \operatorname{logn} [v + \sqrt{(c^2 + v^2)}] + \text{Const.}$$

Für $y = 0$ wird $v = 0$, also Const. $= - c \operatorname{logn} c$, daher

$$(V.)\ y = c \operatorname{logn} \frac{v + \sqrt{(c^2 + v^2)}}{c}.$$

Die vorstehenden fünf verschiedenen Gleichungen für die Kettenlinie setzen voraus, daß durchgängig gleiche Längen der Kette gleiches Gewicht haben. Weil aber das Gewicht der Kette, in Bezug auf ihre Länge, noch nach unzähligen andern Voraussetzungen proportionirt seyn

kann, so müssen auch für jeden besondern Fall andere Gleichungen entstehen. Es wird daher, um Verwechselungen zu vermeiden, diejenige von diesen krummen Linien, bei welcher gleiche Längen gleiches Gewicht haben, eine gemeine Kettenlinie genannt werden.

Eben diese Gleichungen für die Kettenlinie hätte man aus den §. 308. im zweiten Bande gefundenen drei Ausdrücken ableiten können.

§. 93.

Zusatz. Wird vorausgesetzt, daß x gegen y so klein werde, daß man y und v als gleich groß ansehn kann, so erhält man, weil $v\partial y = c\partial x$ (§. 92.) ist, wenn y statt v gesetzt wird,

$$\int y\partial y = \int c\partial x, \text{ also } \tfrac{1}{2}y^2 = cx, \text{ oder}$$
$$y = \sqrt{2cx},$$

daher wird unter dieser Voraussetzung die Kettenlinie eine Parabel, deren Parameter 2 c ist.

Galilei glaubte, daß eine vollkommen biegsame Schnur, wenn sie an ihren beiden Enden aufgehangen wird, eine Parabel bildete (*); dagegen haben Leibnitz, Johann Bernoulli und Hugen zuerst erwiesen, daß diese Linie von einer andern Natur sei.

§. 94.

Soll mit Hülfe der gefundenen Gleichungen eine Kettenlinie gezeichnet werden, so kann solches dadurch geschehen

(*) Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze, attenenti alla mecanica et i movimenti locali, del Sig. Galileo *Galilei*, in Leida 1638. p. 146.

hen, daß man c willkürlich annimmt, und für die verschiedenen Werthe von x die dazu gehörigen Werthe von y nach §. 92. II. berechnet. Allein in diesem Falle, wenn c willkürlich angenommen wird, erhält man für einerlei x einen desto größern Werth für y, je größer c ist. Soll nun mit einem gegebenen Werthe von x ein gewisser Werth von y übereinstimmen, z. B. wenn die größte Ordinate BC = a und die dazu gehörige Abscisse AC = h gegeben sind, und man verlangt für eine solche Kettenlinie die Gleichung, durch welche y aus x bestimmt werden kann, so läßt sich einsehn, daß zuvor c bekannt seyn muß. Weil dies aber mit Hülfe der gefundenen Gleichungen nicht zu bewerkstelligen ist, der vorgelegte Fall aber grade zu denjenigen gehört, welche in der Ausübung am meisten vorkommen, so muß man sich anderer Mittel bedienen, um aus der gegebenen größten Abscisse und Ordinate einer Kettenlinie die Kurve zu construiren. (*)

Am leichtesten scheint sich dies bewerkstelligen zu lassen, wenn für gegebene Werthe von y die zugehörigen Werthe von x nach §. 92. (III.) dergestalt berechnet und in eine Tafel geordnet werden, daß sich y und x durch c bestimmen lassen, z. B. wenn y = 0, 1 . c gesetzt wird,

---

(*) Man hat zur Bestimmung des Werths von c die Regel gegeben, eine Kette oder sehr biegsame Schnur so aufzuhängen, bis solche den Werthen a und h entspricht. Wird alsdann die Länge der Schnur ausgemessen, so könnte man nach §. 92. (I) den Werth für c finden, wenn nur hiedurch v hinlänglich genau bekannt wäre.

so findet man aus III., $x = 0,005004\ c$, und hieraus $\frac{x}{y} = 0,05004$.

Wäre nun in einem besondern Falle die Ordinate y nebst der zugehörigen Abscisse x gegeben, und man fände, daß $\frac{x}{y} = 0,05$ ist, so kann man $y = 0,1 \,.\, c$ setzen. Dies giebt, weil y bekannt ist,

$$c = \frac{y}{0,1} = 10 \,.\, y.$$

Nachstehende Tafel enthält für mehrere Werthe von $\frac{x}{y}$ die zugehörigen Werthe von y und x, bei welchen der Werth von c unbestimmt geblieben ist.

Wenn daher in irgend einem Falle x und y gegeben sind, so suche man in der Tafel den nächsten Werth für $\frac{x}{y}$. Ist alsdann der nebenstehende Werth für $y = m \,.\, c$, so erhält man

$$c = \frac{y}{m},$$

so daß sich nun, weil c bekannt ist, nach §. 92. II. eine Gleichung für die Kettenlinie angeben läßt, welche den Bedingungen entspricht.

$\frac{x}{y}$	y	x
0, 005	0, 010 . c	0, 00005 . c
0, 010	0, 020 . c	0, 00020 . c
0, 015	0, 030 . c	0, 00045 . c
0, 020	0, 040 . c	0, 00081 . c
0, 025	0, 050 . c	0, 00125 . c
0, 030	0, 060 . c	0, 00181 . c
0, 035	0, 070 . c	0, 00245 . c
0, 040	0, 080 . c	0, 00320 . c
0, 045	0, 090 . c	0, 00406 . c
0, 050	0, 100 . c	0, 00500 . c
0, 060	0, 120 . c	0, 00721 . c
0, 070	0, 140 . c	0, 00982 . c
0, 080	0, 160 . c	0, 01283 . c
0, 090	0, 180 . c	0, 01624 . c
0, 100	0, 200 . c	0, 02007 . c
0, 126	0, 250 . c	0, 03141 . c
0, 151	0, 300 . c	0, 04534 . c
0, 177	0, 350 . c	0, 06188 . c
0, 203	0, 400 . c	0, 08107 . c
0, 229	0, 450 . c	0, 10297 . c
0, 255	0, 500 . c	0, 12763 . c
0, 282	0, 550 . c	0, 15510 . c
0, 309	0, 600 . c	0, 18546 . c
0, 337	0, 650 . c	0, 21879 . c
0, 364	0, 700 . c	0, 25517 . c
0, 393	0, 750 . c	0, 29468 . c
0, 422	0, 800 . c	0, 33743 . c
0, 451	0, 850 . c	0, 38353 . c
0, 481	0, 900 . c	0, 43309 . c
0, 512	0, 950 . c	0, 48622 . c

$\frac{x}{y}$	y	x
0, 543	1, 000 . c	0, 54308 . c
0, 575	1, 050 . c	0, 60379 . c
0, 606	1, 100 . c	0, 66646 . c
0, 640	1, 150 . c	0, 73742 . c
0, 676	1, 200 . c	0, 81071 . c
0, 711	1, 250 . c	0, 88842 . c
0, 747	1, 300 . c	0, 97091 . c
0, 784	1, 350 . c	1, 05833 . c
0, 822	1, 400 . c	1, 15090 . c
0, 861	1, 450 . c	1, 24884 . c
0, 902	1, 500 . c	1, 35241 . c
0, 943	1, 550 . c	1, 46186 . c
0, 986	1, 600 . c	1, 57747 . c
0, 995	1, 610 . c	1, 60135 . c
1, 000	1, 616 . c	1, 61580 . c
1, 003	1, 620 . c	1, 62549 . c
1, 030	1, 650 . c	1, 69952 . c
1, 075	1, 700 . c	1, 82832 . c
1, 122	1, 750 . c	1, 96419 . c
1, 171	1, 800 . c	2, 10747 . c
1, 191	1, 820 . c	2, 16694 . c
1, 221	1, 850 . c	2, 25853 . c
1, 252	1, 880 . c	2, 35305 . c
1, 272	1, 900 . c	2, 41773 . c
1, 294	1, 920 . c	2, 48378 . c
1, 326	1, 950 . c	2, 58548 . c
1, 359	1, 980 . c	2, 69040 . c
1, 381	2, 000 . c	2, 76220 . c
1, 404	2, 020 . c	2, 83549 . c
1, 438	2, 050 . c	2, 94832 . c

$\frac{x}{y}$	y	x
1, 473	2, 080 . c	3, 06470 . c
1, 497	2, 100 . c	3, 14431 . c
1, 522	2, 120 . c	3, 22559 . c
1, 558	2, 150 . c	3, 35067 . c
1, 596	2, 180 . c	3, 47967 . c
1, 623	2, 200 . c	3, 56791 . c
1, 648	2, 220 . c	3, 65797 . c
1, 687	2, 250 . c	3, 79657 . c
1, 728	2, 280 . c	3, 93948 . c
1, 755	2, 300 . c	4, 03722 . c
1, 783	2, 320 . c	4, 13697 . c
1, 822	2, 350 . c	4, 29047 . c
1, 879	2, 380 . c	4, 44872 . c
1, 899	2, 400 . c	4, 55695 . c
1, 929	2, 420 . c	4, 66739 . c
1, 974	2, 450 . c	4, 83734 . c
2, 021	2, 480 . c	5, 01250 . c
2, 053	2, 500 . c	5, 13229 . c
2, 085	2, 520 . c	5, 25453 . c
2, 134	2, 550 . c	5, 44259 . c
2, 185	2, 580 . c	5, 63646 . c
2, 219	2, 600 . c	5, 76901 . c
2, 254	2, 620 . c	5, 90426 . c
2, 307	2, 650 . c	6, 11235 . c
2, 361	2, 680 . c	6, 32683 . c
2, 398	2, 700 . c	6, 47347 . c
2, 435	2, 720 . c	6, 62310 . c
2, 492	2, 750 . c	6, 85328 . c
2, 551	2, 780 . c	7, 09053 . c
2, 590	2, 800 . c	7, 25272 . c

$\frac{x}{y}$	y	x
2,630	2,820 . c	7,41823 . c
2,692	2,850 . c	7,67281 . c
2,755	2,880 . c	7,93520 . c
2,798	2,900 . c	8,11458 . c
2,842	2,920 . c	8,29761 . c
2,886	2,940 . c	8,48436 . c
2,931	2,960 . c	8,67489 . c
2,970	2,980 . c	8,86931 . c
2,999	2,990 . c	8,96798 . c
3,026	3,000 . c	9,06766 . c

Hiebei ist noch zu bemerken, daß wenn man $x = 1,61615 . c$ setzt, alsdann $y = 1,61616 . c$ gefunden wird.

Wollte man z. B. eine Kettenlinie zeichnen, bei welcher die größte Abscisse oder $h = 37$, und die größte Ordinate oder $a = 45$ gegeben sind, so findet man

$$\frac{h}{a} = \frac{37}{45} = 0,8222 \ldots .$$

Hiemit stimmt in der Tafel unter $\frac{x}{y}$ die Zahl 0,822 am genauesten überein, man erhält daher, weil y oder $a = 1,4 . c$ ist,

$$c = \frac{a}{1,4} = \frac{45}{1,4} = 32,14285.$$

Da sich nun in der vorstehenden Tafel alle Werthe von x und y für einerlei c auf einerlei Kettenlinie beziehen, so darf man nur die in der Tafel zusammengehörigen Koeffizienten von x und y mit $c = 32,14285$ multipliziren, um zu der gesuchten Kettenlinie nachstehende Werthe für y und x zu erhalten.

y	x	y	x
3, 21	0, 16	25, 71	10, 85
6, 43	0, 64	28, 93	13, 12
9, 64	1, 45	32, 14	17, 46
12, 86	2, 60	35, 36	21, 42
16, 07	4, 10	38, 57	26, 06
19, 29	5, 96	41, 78	31, 21
22, 50	8, 20	45, 00	37, 00

Es lassen sich nun leicht in denjenigen Fällen, wo die gegebenen Werthe von $\frac{h}{a}$ in der Tafel genau genug aufgefunden werden, die zugehörigen Kurven hinlänglich genau angeben. Wenn aber der Werth von $\frac{h}{a}$ nicht genau genug vorhanden ist, so kann das Aufzeichnen der gesuchten Kurve hiedurch nicht bewirkt werden. Auch sieht man leicht, daß eine dergleichen Tafel von großem Umfange seyn müßte, wenn man verlangt, daß die aufeinander folgenden Werthe von x und y keine große Differenzen geben sollen.

§. 95.

Um daher ohne Beihülfe einer Tafel diejenige Gleichung für die Kettenlinie zu bestimmen, welche einer gegebenen Abscisse und Ordinate entspricht, muß man noch einen andern Weg aufsuchen, um diesen Endzweck zu erreichen. Durch nachstehendes Verfahren erhält man einen Näherungsausdruck, welcher für die gewöhnlich in der Ausübung vorkommenden Fälle zureicht, und unter den

aufgestellten Bedingungen mit hinlänglicher Genauigkeit angewandt werden kann.

Nach §. 92. (IV.) ist

$$\frac{2xy}{v^2 - x^2} = \text{logn}\,\frac{v + x}{v - x} = \text{logn}\,\frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}}.$$

Es ist aber (P. A. 1. B. S. 424. V.)

$$\text{logn}\,\frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}} = 2\left[\frac{x}{v} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{v}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{v}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

$$y = (v^2 - x^2)\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{v^3} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{v^5} + \frac{1}{7}\frac{x^6}{v^7} + \ldots\right]$$

$$y = v - \frac{2}{1\cdot3}\frac{x^2}{v} - \frac{2}{3\cdot5}\frac{x^4}{v^3} - \frac{2}{5\cdot7}\frac{x^6}{v^5} - \frac{2}{7\cdot9}\frac{x^8}{v^7} - \ldots$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch v dividirt und $\frac{x}{v} = z$ setzt,

$$\frac{y}{v} = 1 - \frac{2}{1\cdot3}z^2 - \frac{2}{3\cdot5}z^4 - \frac{2}{5\cdot7}z^6 - \frac{2}{7\cdot9}z^8 - \ldots \text{ also}$$

$$\frac{y^2}{v^2} = 1 - \frac{4}{3}z^2 + \frac{8}{45}z^4 + \frac{4}{63}z^6 + \frac{16}{525}z^8 + \frac{892}{51975}z^{10} + \ldots$$

oder

$$\frac{v^2 - y^2}{v^2} = \frac{4}{3}z^2 - \frac{8}{45}z^4 - \frac{4}{63}z^6 - \frac{16}{525}z^8 - \ldots$$

oder wenn durch z^2 dividirt und x^2 statt v^2z^2 gesetzt wird,

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45}z^2 - \frac{4}{63}z^4 - \frac{16}{525}z^6 - \ldots$$

Verwandelt man diese Reihe in einen Kettenbruch, und sucht mit Hülfe desselben einen Näherungswerth, so erhält man

$$\frac{4(210 - 103z^2)}{45(14 - 5z^2)} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45}z^2 - \frac{4}{63}z^4 - \frac{10}{441}z^6 - \ldots$$

also nahe genug

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \frac{4\,(210 - 103z^2)}{45\,(14 - 5z^2)},$$

oder für v^2 und z^2 die Werthe $2cx + x^2$ und $\frac{x^2}{v^2} = \frac{x}{2c + x}$ gesetzt, giebt

$$\frac{2cx + x^2 - y^2}{x^2} = \frac{1680\,cx + 428x^2}{1260\,cx + 405x^2}.$$

Hieraus erhält man

$$y^2 = \frac{x\,(2520\,c^2 + 390\,cx - 23x^2)}{45\,(28c + 9x)}.$$

Weil dieser Näherungsausdruck den Werth für y etwas zu klein angiebt, derselbe aber für die bei Gewölben gewöhnlich vorkommenden Fälle nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 9c$ gebraucht wird, so läßt sich dieser Ausdruck dadurch noch verbessern, daß man die allgemeine Form desselben beibehält, die Koeffizienten aber nach den erforderlichen Bedingungen noch näher bestimmt. Man setze daher

$$y^2 = \frac{\alpha c^2 x + \beta c x^2 - \gamma x^3}{\delta c + x},$$

und bestimme nach der Tafel §. 94. für verschiedene bekannte Werthe von x und y die Koeffizienten α, β, γ, δ. Da nun die Gleichung nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 9c$ angewandt werden soll, und schon für $x = 0$ die erforderliche Eigenschaft hat, daß $y = 0$ wird, so kann man sich zur Bestimmung der Koeffizienten α, β, γ, δ der Werthe $y = 0{,}7\,.\,c$; $y = 1{,}5\,.\,c$; $y = 2{,}3\,.\,c$ und $y = 3c$ bedienen. Diese geben nach der angeführten Tafel

$x = 0{,}25517\,c$ für $y = 0{,}7\,c$

$x = 1{,}35241\,c$ für $y = 1{,}5\,c$

kann, so müssen auch für jeden besondern Fall andere Gleichungen entstehen. Es wird daher, um Verwechselungen zu vermeiden, diejenige von diesen krummen Linien, bei welcher gleiche Längen gleiches Gewicht haben, eine gemeine Kettenlinie genannt werden.

Eben diese Gleichungen für die Kettenlinie hätte man aus den §. 308. im zweiten Bande gefundenen drei Ausdrücken ableiten können.

§. 93.

Zusatz. Wird vorausgesetzt, daß x gegen y so klein werde, daß man y und v als gleich groß ansehn kann, so erhält man, weil $v\partial y = c\partial x$ (§. 92.) ist, wenn y statt v gesetzt wird,

$$\int y\partial y = \int c\partial x, \text{ also } \tfrac{1}{2}y^2 = cx, \text{ oder}$$

$$y = \sqrt{2cx},$$

daher wird unter dieser Voraussetzung die Kettenlinie eine Parabel, deren Parameter 2 c ist.

Galilei glaubte, daß eine vollkommen biegsame Schnur, wenn sie an ihren beiden Enden aufgehangen wird, eine Parabel bildete (*); dagegen haben Leibnitz, Johann Bernoulli und Hugen zuerst erwiesen, daß diese Linie von einer andern Natur sei.

§. 94.

Soll mit Hülfe der gefundenen Gleichungen eine Kettenlinie gezeichnet werden, so kann solches dadurch gesche-

(*) Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze, attenenti alla mecanica et i movimenti locali, del Sig. Galileo *Galilei*, in Leida 1638. p. 146.

mung mit den allgemeinen Gleichungen §. 92. noch besser übersehen, wenn man durchgängig x = 10 setzt, und für verschiedene Werthe von c nach §. 92. (II) die zugehörigen Werthe von y sucht. Die folgende Tafel enthält in der ersten Spalte die Werthe von c, in der zweiten die Werthe von y nach §. 92. (II) berechnet, und in der dritten diejenigen Werthe für y, welche man mittelst des vorstehenden Näherungsausdrucks findet

Für x = 10

c	nach §. 92. y	Näherungswerth y
1	3, 088	3, 084
2	4, 956	4, 958
3	6, 437	6, 436
4	7, 699	7, 697
5	8, 814	8, 812
10	13, 169	13, 171
20	19, 248	19, 255
30	23, 861	23, 869
40	27, 726	27, 733
50	31, 119	31, 126

§. 96.

Für gegebene Werthe von x und y läßt sich nun leicht der Werth von c, und dadurch die Gleichung zwischen x

und y für besondere Fälle finden. Denn nach dem vorigen §. erhält man

$39939cy^2 + 10000xy^2 = 79888c^2x + 6913cx^2 - 157x^3$,

und wenn hieraus c entwickelt wird:

$$c = \frac{39939y^2 - 6913x^2}{159776x} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{39939y^2 - 6913x^2}{159776x}\right)^2 + \frac{157x^2 + 10000y^2}{79888}\right]}$$

wo nur das obere Zeichen vor der Wurzel gelten kann, weil c nicht negativ werden darf. Wird dieser Ausdruck durch die Verrichtung der Divisionen noch mehr abgekürzt, so erhält man nahe genug

$$c = \frac{25y^2 - 4{,}33x^2 + \sqrt{(38x^4 + 1036x^2y^2 + 625y^4)}}{100x}.$$

Für $x = h$ und $y = 3h$ wird

$c = 4{,}656\,h.$

Für $x = h$ und $y = 2h$ erhält man

$c = 2{,}088\,h.$

Wenn $x = y = h$ ist, so wird

$c = 0{,}619\,h;$

und endlich für $x = h$ und $y = \frac{1}{2}h$ ist

$c = 0{,}202\,h.$

Um auch hier die schöne Uebereinstimmung mit den allgemeinen Ausdrücken §. 92. zu übersehen, setze man $x = h$ und $c = 4{,}656\,h$, so erhält man nach §. 92. II.

$$y = 4{,}656\,h \operatorname{logn} \frac{5{,}656 + \sqrt{10{,}312}}{4{,}656} = 2{,}9997\,h,$$

statt daß $y = 3h$ seyn soll, wo also der Fehler nur $\frac{3}{10000}h$ beträgt.

§. 97.

Weil ϕ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente mit dem Horizonte einschließt, und §. 88. (IV)

$C \operatorname{tgt} \varphi = V$ ist, so erhält man

$$\operatorname{tgt} \varphi = \frac{V}{C} = \frac{g\,v}{g\,c}, \text{ oder §. 92. (I)}$$

$$\text{(I)} \operatorname{tgt} \varphi = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(2cx + x^2)}}{c}.$$

Wird $v = \infty$, so ist $\operatorname{tgt} \varphi = \infty$, also die Tangente vertikal. Es kann daher nur bei einer unendlich langen Kette die Tangente derselben senkrecht auf dem Horizonte stehen.

Es ist $\operatorname{tgt} \frac{1}{2}\varphi = \frac{\operatorname{tgt} \varphi}{1 + \sqrt{(1 + \operatorname{tgt} \varphi^2)}} = \frac{v}{c + \sqrt{(c^2 + v^2)}}$.

Nach §. 92. (I) ist aber $c = \frac{v^2 - x^2}{2x}$, daher, wenn dieser Werth statt c in die gefundene Gleichung gesetzt wird,

$$\text{(II)} \operatorname{tgt} \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{x}{v}.$$

Weil $\operatorname{tgt} \varphi^2 = \frac{\sin \varphi^2}{1 - \sin \varphi^2} = \frac{1 - \cos \varphi^2}{\cos \varphi^2} = \frac{2cx + x^2}{c^2}$, so erhält man hienach

$$\text{(III)} \sin \varphi = \frac{\sqrt{(2cx + x^2)}}{c + x} = \frac{v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} \text{ und}$$

$$\text{(IV)} \cos \varphi = \frac{c}{c + x} = \frac{c}{\sqrt{(c^2 + v^2)}}.$$

Es ist ferner §. 89. (III)

$\partial y = \frac{c\,\partial v}{\sqrt{(c^2 + v^2)}} = \cos \varphi\, \partial v$. Aber nach (I) ist

$\partial v = c\, \partial \operatorname{tgt} \varphi = \frac{c\,\partial \varphi}{\cos \varphi^2}$, also

$\partial y = \frac{c\,\partial \varphi}{\cos \varphi}$, folglich (P. A. S. 245.)

$$\text{(V)} y = \tfrac{1}{2} c \,.\, \operatorname{logn} \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

§. 98.

Zusatz. Der Winkel, welchen die Tangente der Kettenlinie in ihrem Aufhangepunkte mit der Horizontale bildet, sei α, so ist für $x = h$

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{(2ch + h^2)}}{c}.$$

Ist nun a die größte Ordinate, welche zur größten Abscisse h gehört, so wird

für $a = 3h$ (§. 96.) $c = 4{,}656\ h$, also

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{10{,}312}}{4{,}656} = 0{,}6897 = \text{tgt}\ 34°\ 36'.$$

Eine aufgehängte in allen Theilen gleich schwere Kette, deren größte Ordinate dreimal so groß ist als die zugehörige Abscisse, bildet daher in ihrem Aufhängepunkte mit dem Horizonte einen Winkel von 34 Grad 36 Minuten.

Für $a = 2h$ ist $c = 2{,}088\,h$, daher

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{5{,}176}}{2{,}088} = 1{,}0896 = \text{tgt}\ 47°\ 27'.$$

Für $a = h$ ist $c = 0{,}619\,h$, also

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{2{,}238}}{0{,}619} = 2{,}4168 = \text{tgt}\ 67°\ 31',$$

und für $a = \frac{1}{2}h$ wird $c = 0{,}202\ h$, folglich

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{1{,}404}}{0{,}202} = 5{,}866 = \text{tgt}\ 80°\ 20'.$$

§. 99.

Wenn r den Halbmesser der Krümmung bezeichnet, welcher der Abscisse x entspricht, so ist für jede krumme Linie $r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y}$, wo ∂x als constant angenommen werden muß. Nun ist §. 92.

$v \partial y = c \partial x$, daher wenn man differenziirt, weil $\partial^2 x = 0$ ist,

$\partial v \partial y + v \partial^2 y = 0$ oder $\frac{-\partial v}{\partial^2 y} = \frac{v}{\partial y}$, also

$$\frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y} = \frac{v\,\partial v^2}{\partial x\,\partial y} = v\ \frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x \partial y} = v\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Aber

Aber $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{v}{c}$, also

$$\frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y} = v\left(\frac{v}{c} + \frac{c}{v}\right), \text{ oder}$$

$$(I)\ r = \frac{c^2 + v^2}{c},$$

und weil §. 92. (I) $v^2 = 2cx + x^2$ ist,

$$(II)\ r = \frac{(c + x)^2}{c}.$$

Der Halbmesser der Krümmung ist daher für $x = 0$ oder am Scheitel am kleinsten, und wächst mit x.

Weil $\frac{v}{c} = \text{tgt}\ \varphi$, also $v^2 = c^2\ \text{tgt}\ \varphi^2$, oder $c^2 + v^2 = c^2 + c^2\,\text{tgt}\,\varphi^2 = c^2(1 + \text{tgt}\,\varphi^2) = c^2 \sec\varphi^2$, so erhält man auch, wenn dieser Werth in I. gesetzt wird, (III) $r = c \sec \varphi^2$ oder auch $r \cos \varphi^2 = c$, und (IV) $\sin \varphi = \sqrt{\frac{r - c}{r}}$.

Wäre ϱ der Krümmungshalbmesser am Scheitel, so ist für diesen Fall $x = 0$, also (II)

$$\varrho = c.$$

§. 100.

Zusatz. Bezeichnen a, h die größten Ordinaten und Abscissen einer Kettenlinie, und ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser am Scheitel und am Aufhängepunkte derselben, so ist §. 99.

$$\varrho = c \text{ und } \varrho' = \frac{(c + h)^2}{c}.$$

Für $a = 3h$ ist $c = 4{,}656\,h$, daher

$$\varrho = 4{,}656\,h \text{ und } \varrho' = \frac{5{,}656^2}{4{,}656}\,h.$$

Für verschiedene Werthe von a entstehet nachstehende Tafel.

$\frac{x}{y}$	y	x
2,630	2,820 . c	7,41823 . c
2,692	2,850 . c	7,67281 . c
2,755	2,880 . c	7,93520 . c
2,798	2,900 . c	8,11458 . c
2,842	2,920 . c	8,29761 . c
2,886	2,940 . c	8,48436 . c
2,931	2,960 . c	8,67489 . c
2,970	2,980 . c	8,86931 . c
2,999	2,990 . c	8,96798 . c
3,026	3,000 . c	9,06766 . c

Hiebei ist noch zu bemerken, daß wenn man $x = 1,61615 . c$ setzt, alsdann $y = 1,61616 . c$ gefunden wird.

Wollte man z. B. eine Kettenlinie zeichnen, bei welcher die größte Abscisse oder $h = 37$, und die größte Ordinate oder $a = 45$ gegeben sind, so findet man

$$\frac{h}{a} = \frac{37}{45} = 0,8222 \ldots.$$

Hiemit stimmt in der Tafel unter $\frac{x}{y}$ die Zahl 0,822 am genauesten überein, man erhält daher, weil y oder $a = 1,4 . c$ ist,

$$c = \frac{a}{1,4} = \frac{45}{1,4} = 32,14285.$$

Da sich nun in der vorstehenden Tafel alle Werthe von x und y für einerlei c auf einerlei Kettenlinie beziehen, so darf man nur die in der Tafel zusammengehörigen Koeffizienten von x und y mit $c = 32,14285$ multipliziren, um zu der gesuchten Kettenlinie nachstehende Werthe für y und x zu erhalten.

y	x	y	x
3, 21	0, 16	25, 71	10, 85
6, 43	0, 64	28, 93	13, 12
9, 64	1, 45	32, 14	17, 46
12, 86	2, 60	35, 36	21, 42
16, 07	4, 10	38, 57	26, 06
19, 29	5, 96	41, 78	31, 21
22, 50	8, 20	45, 00	37, 00

Es lassen sich nun leicht in denjenigen Fällen, wo die gegebenen Werthe von $\frac{h}{a}$ in der Tafel genau genug aufgefunden werden, die zugehörigen Kurven hinlänglich genau angeben. Wenn aber der Werth von $\frac{h}{a}$ nicht genau genug vorhanden ist, so kann das Aufzeichnen der gesuchten Kurve hiedurch nicht bewirkt werden. Auch sieht man leicht, daß eine dergleichen Tafel von großem Umfange seyn müßte, wenn man verlangt, daß die aufeinander folgenden Werthe von x und y keine große Differenzen geben sollen.

§. 95.

Um daher ohne Beihülfe einer Tafel diejenige Gleichung für die Kettenlinie zu bestimmen, welche einer gegebenen Abscisse und Ordinate entspricht, muß man noch einen andern Weg aufsuchen, um diesen Endzweck zu erreichen. Durch nachstehendes Verfahren erhält man einen Näherungsausdruck, welcher für die gewöhnlich in der Ausübung vorkommenden Fälle zureicht, und unter den

aufgestellten Bedingungen mit hinlänglicher Genauigkeit angewandt werden kann.

Nach §. 92. (IV.) ist

$$\frac{2xy}{v^2 - x^2} = \operatorname{logn} \frac{v + x}{v - x} = \operatorname{logn} \frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}}.$$

Es ist aber (P. A. 1. B. S. 424. V.)

$$\operatorname{logn} \frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}} = 2\left[\frac{x}{v} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{v}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{v}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

$$y = (v^2 - x^2)\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{v^3} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{v^5} + \frac{1}{7}\frac{x^6}{v^7} + \ldots\right] \text{so}$$

$$y = v - \frac{2}{1\cdot 3}\frac{x^2}{v} - \frac{2}{3\cdot 5}\frac{x^4}{v^3} - \frac{2}{5\cdot 7}\frac{x^6}{v^5} - \frac{2}{7\cdot 9}\frac{x^8}{v^7} - \ldots$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch v dividirt und $\frac{x}{v} = z$ setzt,

$$\frac{y}{v} = 1 - \frac{2}{1\cdot 3} z^2 - \frac{2}{3\cdot 5} z^4 - \frac{2}{5\cdot 7} z^6 - \frac{2}{7\cdot 9} z^8 - \ldots \text{ also}$$

$$\frac{y^2}{v^2} = 1 - \frac{4}{3} z^2 + \frac{8}{45} z^4 + \frac{4}{63} z^6 + \frac{16}{525} z^8 + \frac{892}{51975} z^{10} + \ldots$$

oder

$$\frac{v^2 - y^2}{v^2} = \frac{4}{3} z^2 - \frac{8}{45} z^4 - \frac{4}{63} z^6 - \frac{16}{525} z^8 - \ldots$$

oder wenn durch z^2 dividirt und x^2 statt $v^2 z^2$ gesetzt wird,

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45} z^2 - \frac{4}{63} z^4 - \frac{16}{525} z^6 - \ldots$$

Verwandelt man diese Reihe in einen Kettenbruch, und sucht mit Hülfe desselben einen Näherungswerth, so erhält man

$$\frac{4\,(210 - 103 z^2)}{45\,(14 - 5 z^2)} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45} z^2 - \frac{4}{63} z^4 - \frac{10}{441} z^6 - \ldots$$

also nahe genug

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \frac{4(210 - 103 z^2)}{45(14 - 5z^2)},$$

oder für v^2 und z^2 die Werthe $2cx + x^2$ und $\frac{x^2}{v^2} = \frac{x}{2c + x}$ gesetzt, giebt

$$\frac{2cx + x^2 - y^2}{x^2} = \frac{1680cx + 428x^2}{1260cx + 405x^2}.$$

Hieraus erhält man

$$y^2 = \frac{x(2520c^2 + 390cx - 23x^2)}{45(28c + 9x)}.$$

Weil dieser Näherungsausdruck den Werth für y etwas zu klein angiebt, derselbe aber für die bei Gewölben gewöhnlich vorkommenden Fälle nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 9c$ gebraucht wird, so läßt sich dieser Ausdruck dadurch noch verbessern, daß man die allgemeine Form desselben beibehält, die Koeffizienten aber nach den erforderlichen Bedingungen noch näher bestimmt. Man setze daher

$$y^2 = \frac{\alpha c^2 x + \beta c x^2 - \gamma x^3}{\delta c + x},$$

und bestimme nach der Tafel §. 94. für verschiedene bekannte Werthe von x und y die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Da nun die Gleichung nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ und $x = 9c$ angewandt werden soll, und schon für $x = 0$ die erforderliche Eigenschaft hat, daß $y = 0$ wird, so kann man sich zur Bestimmung der Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Werthe $y = 0{,}7 . c$; $y = 1{,}5 . c$; $y = 2{,}3 . c$ und $y = 3c$ bedienen. Diese geben nach der angeführten Tafel

$x = 0{,}25517\,c$ für $y = 0{,}7\,c$

$x = 1{,}35241\,c$ für $y = 1{,}5\,c$

aufgestellten Bedingungen mit hinlänglicher Genauigkeit angewandt werden kann.

Nach §. 92. (IV.) ist

$$\frac{2xy}{v^2 - x^2} = \operatorname{logn} \frac{v + x}{v - x} = \operatorname{logn} \frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}}.$$

Es ist aber (P. A. 1. B. S. 424. V.)

$$\operatorname{logn} \frac{1 + \frac{x}{v}}{1 - \frac{x}{v}} = 2\left[\frac{x}{v} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{v}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{v}\right)^5 + \ldots\right]$$

oder

$$y = (v^2 - x^2)\left[\frac{1}{v} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{v^3} + \frac{1}{5}\frac{x^4}{v^5} + \frac{1}{7}\frac{x^6}{v^7} + \ldots\right]$$

$$y = v - \frac{2}{1\cdot3}\frac{x^2}{v} - \frac{2}{3\cdot5}\frac{x^4}{v^3} - \frac{2}{5\cdot7}\frac{x^6}{v^5} - \frac{2}{7\cdot9}\frac{x^8}{v^7} - \ldots$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch v dividirt und $\frac{x}{v} = z$ setzt,

$$\frac{y}{v} = 1 - \frac{2}{1\cdot3}z^2 - \frac{2}{3\cdot5}z^4 - \frac{2}{5\cdot7}z^6 - \frac{2}{7\cdot9}z^8 - \ldots$$ also

$$\frac{y^2}{v^2} = 1 - \frac{4}{3}z^2 + \frac{8}{45}z^4 + \frac{4}{63}z^6 + \frac{16}{525}z^8 + \frac{892}{51975}z^{10} + \ldots$$

oder

$$\frac{v^2 - y^2}{v^2} = \frac{4}{3}z^2 - \frac{8}{45}z^4 - \frac{4}{63}z^6 - \frac{16}{525}z^8 - \ldots$$

oder wenn durch z^2 dividirt und x^2 statt $v^2 z^2$ gesetzt wird,

$$\frac{v^2 - y^2}{x^2} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45}z^2 - \frac{4}{63}z^4 - \frac{16}{525}z^6 - \ldots$$

Verwandelt man diese Reihe in einen Kettenbruch, und sucht mit Hülfe desselben einen Näherungswerth, so erhält man

$$\frac{4\,(210 - 103z^2)}{45\,(14 - 5z^2)} = \frac{4}{3} - \frac{8}{45}z^2 - \frac{4}{63}z^4 - \frac{10}{441}z^6 - \ldots$$

mung mit den allgemeinen Gleichungen §. 92. noch besser übersehen, wenn man durchgängig $x = 10$ setzt, und für verschiedene Werthe von c nach §. 92. (II) die zugehörigen Werthe von y sucht. Die folgende Tafel enthält in der ersten Spalte die Werthe von c, in der zweiten die Werthe von y nach §. 92. (II) berechnet, und in der dritten diejenigen Werthe für y, welche man mittelst des vorstehenden Näherungsausdrucks findet

Für $x = 10$

c	nach §. 92. y	Näherungswerth y
1	3,088	3,084
2	4,956	4,958
3	6,437	6,436
4	7,699	7,697
5	8,814	8,812
10	13,169	13,171
20	19,248	19,255
30	23,861	23,869
40	27,726	27,733
50	31,119	31,126

§. 96.

Für gegebene Werthe von x und y läßt sich nun leicht der Werth von c, und dadurch die Gleichung zwischen x

und y für besondere Fälle finden. Denn nach dem vorigen §. erhält man

$39939cy^2+10000xy^2=79888c^2x+6913cx^2-157x^3$,

und wenn hieraus c entwickelt wird:

$$c=\frac{39939y^2-6913x^2}{159776x}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{39939y^2-6913x^2}{159776x}\right)^2+\frac{157x^2+10000y^2}{79888}\right]}$$

wo nur das obere Zeichen vor der Wurzel gelten kann, weil c nicht negativ werden darf. Wird dieser Ausdruck durch die Verrichtung der Divisionen noch mehr abgekürzt, so erhält man nahe genug

$$c=\frac{25y^2-4,33x^2+\sqrt{(38x^4+1036x^2y^2+625y^4)}}{100x}.$$

Für $x=h$ und $y=3h$ wird

$c=4,656\,h$.

Für $x=h$ und $y=2h$ erhält man

$c=2,088\,h$.

Wenn $x=y=h$ ist, so wird

$c=0,619\,h$;

und endlich für $x=h$ und $y=\frac{1}{2}h$ ist

$c=0,202\,h$.

Um auch hier die schöne Uebereinstimmung mit den allgemeinen Ausdrücken §. 92. zu übersehen, setze man $x=h$ und $c=4,656\,h$, so erhält man nach §. 92. II.

$$y=4,656\,h\,\text{logn}\,\frac{5,656+\sqrt{10,312}}{4,656}=2,9997\,h,$$

statt daß $y=3h$ seyn soll, wo also der Fehler nur $\frac{3}{10000}h$ beträgt.

§. 97.

Weil φ den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente mit dem Horizonte einschließt, und §. 88. (IV)

C tgt φ = V ist, so erhält man

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{V}{C} = \frac{g\,v}{g\,c}, \text{ oder §. 92. (I)}$$

$$\text{(I) tgt}\,\varphi = \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{(2cx + x^2)}}{c}.$$

Wird v = ∞, so ist tgt φ = ∞, also die Tangente vertikal. Es kann daher nur bei einer unendlich langen Kette die Tangente derselben senkrecht auf dem Horizonte stehen.

Es ist $\text{tgt}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{\text{tgt}\,\varphi}{1+\sqrt{(1+\text{tgt}\,\varphi^2)}} = \frac{v}{c+\sqrt{(c^2+v^2)}}$.

Nach §. 92. (I) ist aber $c = \frac{v^2 - x^2}{2x}$, daher, wenn dieser Werth statt c in die gefundene Gleichung gesetzt wird,

$$\text{(II) tgt}\,\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{x}{v}.$$

Weil $\text{tgt}\,\varphi^2 = \frac{\sin\varphi^2}{1-\sin\varphi^2} = \frac{1-\cos\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \frac{2cx+x^2}{c^2}$, so erhält man hienach

$$\text{(III) } \sin\varphi = \frac{\sqrt{(2cx+x^2)}}{c+x} = \frac{v}{\sqrt{(c^2+v^2)}} \text{ und}$$

$$\text{(IV) } \cos\varphi = \frac{c}{c+x} = \frac{c}{\sqrt{(c^2+v^2)}}.$$

Es ist ferner §. 89. (III)

$\partial y = \frac{c\,\partial v}{\sqrt{(c^2+v^2)}} = \cos\varphi\,\partial v$. Aber nach (I) ist

$\partial v = c\,\partial\,\text{tgt}\,\varphi = \frac{c\,\partial\varphi}{\cos\varphi^2}$, also

$\partial y = \frac{c\,\partial\varphi}{\cos\varphi}$, folglich (P. A. S. 245.)

$$\text{(V) } y = \tfrac{1}{2}c\,.\,\text{logn}\,\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}.$$

§. 98.

Zusatz. Der Winkel, welchen die Tangente der Kettenlinie in ihrem Aufhangepunkte mit der Horizontale bildet, sei α, so ist für x = h

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{(2ch + h^2)}}{c}.$$

Ist nun a die größte Ordinate, welche zur größten Abscisse h gehört, so wird
für a = 3h (§. 96.) c = 4,656 h, also

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{10,312}}{4,656} = 0,6897 = \text{tgt}\,34^\circ\,36'.$$

Eine aufgehängte in allen Theilen gleich schwere Kette, deren größte Ordinate dreimal so groß ist als die zugehörige Abscisse, bildet daher in ihrem Aufhängepunkte mit dem Horizonte einen Winkel von 34 Grad 36 Minuten.

Für a = 2h ist c = 2,088 h, daher

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{5,176}}{2,088} = 1,0896 = \text{tgt}\,47^\circ\,27'.$$

Für a = h ist c = 0,619 h, also

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{2,238}}{0,619} = 2,4168 = \text{tgt}\,67^\circ\,31',$$

und für $a = \frac{1}{2}h$ wird c = 0,202 h, folglich

$$\text{tgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{1,404}}{0,202} = 5,866 = \text{tgt}\,80^\circ\,20'.$$

§. 99.

Wenn r den Halbmesser der Krümmung bezeichnet, welcher der Abscisse x entspricht, so ist für jede krumme Linie $r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y}$, wo ∂x als constant angenommen werden muß. Nun ist §. 92.
$v \partial y = c \partial x$, daher wenn man differenziirt, weil $\partial^2 x = 0$ ist,

$$\partial v \partial y + v \partial^2 y = 0 \text{ oder } \frac{-\partial v}{\partial^2 y} = \frac{v}{\partial y}, \text{ also}$$

$$\frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y} = \frac{v\,\partial v^2}{\partial x\,\partial y} = v\,\frac{\partial x^2 + \partial y^2}{\partial x \partial y} = v\left(\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}\right).$$

Aber

Aber $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{v}{c}$, also

$$\frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y} = v\left(\frac{v}{c} + \frac{c}{v}\right), \text{ oder}$$

$$\text{(I) } r = \frac{c^2 + v^2}{c},$$

und weil §. 92. (I) $v^2 = 2cx + x^2$ ist,

$$\text{(II) } r = \frac{(c+x)^2}{c}.$$

Der Halbmesser der Krümmung ist daher für $x = 0$ oder am Scheitel am kleinsten, und wächst mit x.

Weil $\frac{v}{c} = \text{tgt}\,\varphi$, also $v^2 = c^2\,\text{tgt}\,\varphi^2$, oder $c^2 + v^2 = c^2 + c^2\,\text{tgt}\,\varphi^2 = c^2(1 + \text{tgt}\,\varphi^2) = c^2 \sec\varphi^2$, so erhält man auch, wenn dieser Werth in I. gesetzt wird,
(III) $r = c \sec\varphi^2$ oder auch $r \cos\varphi^2 = c$, und
(IV) $\sin\varphi = \sqrt{\frac{r-c}{r}}$.

Wäre ϱ der Krümmungshalbmesser am Scheitel, so ist für diesen Fall $x = 0$, also (II)

$$\varrho = c.$$

§. 100.

Zusatz. Bezeichnen a, h die größten Ordinaten und Abscissen einer Kettenlinie, und ϱ, ϱ' die Krümmungshalbmesser am Scheitel und am Aufhängepunkte derselben, so ist §. 99.

$$\varrho = c \text{ und } \varrho' = \frac{(c+h)^2}{c}.$$

Für $a = 3h$ ist $c = 4{,}656\,h$, daher
$\varrho = 4{,}656\,h$ und $\varrho' = \frac{5{,}656^2}{4{,}656}\,h$.

Für verschiedene Werthe von a entstehet nachstehende Tafel.

Größte Ordinate a	Krümmungshalbmesser am	
	Scheitel. ϱ	Aufhängepunkte. ϱ'
3 h	4, 656 . h	6, 871 . h
2 h	2, 088 . h	4, 567 . h
h	0, 619 . h	4, 235 . h
$\frac{1}{2}$ h	0, 202 . h	7, 152 . h

§. 101.

Es sei T die Spannung der in allen Theilen gleich schweren Kette in irgend einem Punkte, und t die Länge eines Stücks von der Kette, dessen Gewicht der Spannung T gleich ist, so erhält man
$T = gt$ (§. 92.) und weil $V = gv$ ist, so wird §. 88. (V)

$$gt = \sqrt{(g^2c^2 + g^2v^2)}, \text{ oder}$$

$$\text{(I) } t = \sqrt{(c^2 + v^2)}.$$

Ferner ist $v^2 = 2cx + x^2$ (§. 92.), daher

$$\text{(II) } t = c + x.$$

Die Spannung wächst also mit der Abscisse x.

Weil §. 99. (II)

$$c + x = \sqrt{cr},$$

so erhält man

$$\text{(III) } t = \sqrt{cr},$$

oder die Spannung ist der Quadratwurzel aus dem Krümmungshalbmesser proportional.

Nach §. 97. (I) ist $c = \frac{v}{tgt\ \varphi} = v \cot \varphi$, also nach (I)

$t = \sqrt{(v^2 \cot \varphi + v^2)} = v \sqrt{(1 + \cot \varphi)}$, oder weil $\sqrt{(1 + \cot \varphi)} = \frac{1}{\sin \varphi}$ ist, so erhält man auch

$$(IV)\ t = \frac{v}{\sin \varphi} = v \,.\, \mathrm{cosec}\ \varphi.$$

§. 102.

Zusatz. Man setze, daß τ und τ' diejenigen Kettenlängen bezeichnen, deren Gewichte den Spannungen am Scheitel und Aufhängepunkte gleichgeltend sind, so findet man nach dem Vorhergehenden

$$\tau = c \text{ und } \tau' = c + h.$$

Für verschiedene Ketten erhält man daher nach §. 96. folgende Spannungen:

Größte Ordinate a	Spannung am	
	Scheitel. τ	Aufhängepunkte. τ'
3 h	4, 656 . h	5, 656 . h
2 h	2, 088 . h	3, 088 . h
h	0, 619 . h	1, 619 . h
$\frac{1}{2}$ h	0, 202 . h	1, 202 . h

Will man die Spannung T in Pfunden ausdrücken, so darf nur das Gewicht eines Fußes von der Kettenlänge mit t multiplizirt werden. Dieses Gewicht sei g, so ist

$$T = gt.$$

§. 103.

Taf. V. Fig. 39. Die Quadratur des Raumes AMP = F', Figur 39., welcher bei der gemeinen Kettenlinie durch den Bogen AM, die Abscisse AP = x, und die Ordinate PM = y eingeschlossen wird, der hier die Kettenfläche heißen soll, ist vom Integral $y\partial x$ abhängig. Nun ist $F' = \int y\partial x = xy - \int x\partial y$. Aber §. 92. (II) $\int x\partial y = \int \frac{cx\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}$. Man setze daher $2cx + x^2 = z^2$, so ist $\partial z = \frac{(c + x)\partial x}{z}$, also $z = \int \frac{c\partial x}{z} + \int \frac{x\partial x}{z}$, oder wenn für z sein Werth $= \sqrt{(2cx + x^2)}$ gesetzt wird,

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = \sqrt{(2cx + x^2)} - \int \frac{c\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}.$$

Das letzte Integral ist nach §. 92. = y, daher $\int \frac{cx\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = c\sqrt{(2cx + x^2)} - cy$, folglich

$$\int y\partial x = xy - c\sqrt{(2cx + x^2)} + cy,$$

wo keine Constante hinzukommt, weil F' mit x und y zugleich verschwindet, daher ist die gesuchte Fläche

(I) $F' = (x + c)y - c\sqrt{(2cx + x^2)}$,

oder nach §. 92. (I)

(II) $F' = (x + c)y - cv$,

oder, wenn in (I) statt y sein Werth aus §. 92. (II) gesetzt wird,

(III) $F' = c(c + x)\,\text{logn}\,\frac{c + x + \sqrt{(2cx + x^2)}}{c} - c\sqrt{(2cx + x^2)}$.

Für $x = h$ und $y = a$ werde $F' = F$, so ist nach (I)

(IV) $F = (h + c)a - c\sqrt{(2ch + h^2)}$.

§. 104.

Aufgabe. Der Raum $A A' B' B$, Figur 40., welcher auf einer Seite von der Kettenlinie $A M B$ begrenzt wird, habe die Beschaffenheit, daß alle auf den Elementen der Kettenlinie senkrechte Linien wie $M M'$, $A A'$, $B B'$, einander gleich sind, oder daß die krumme Linie $A' M' B'$ mit der Kettenlinie parallel (*) ist; man suche den Flächeninhalt von $A A' B' B$. Taf. V. Fig. 40.

Auflösung. Es sei $B C = a$, $A A' = b$ und für $A P = x$, $A M = v$; der zum Elemente $M m = \partial v$ gehörige Krümmungshalbmesser $M O = r$. Ferner $A A' B' B = f$; $A A' M' M = f'$, also $M M' m' m = \partial f'$, so verhält sich

$r : r + b = \partial v : M' m'$, also $M' m' = \frac{r+b}{r} \partial v$. Nun ist

$\partial f' = \frac{M m + M' m'}{2} b = \frac{(2r + b) b}{2r} \partial v$, oder weil §. 99.

$r = \frac{c^2 + v^2}{c}$, so ist $\partial f' = \frac{2(c^2 + v^2) b + b c^2}{2(c^2 + v^2)} \partial v$, also

$f' = \int b \partial v + \frac{b c^2}{2} \int \frac{\partial v}{c^2 + v^2}$. Nun ist (P. A. S. 134.)

$$\int \frac{\partial v}{c^2 + v^2} = \frac{1}{c} \text{Arc tgt} \frac{v}{c}, \text{ daher}$$

$$f' = b v + \frac{b c}{2} \text{Arc tgt} \frac{v}{c},$$

wo keine Constante hinzukommt, weil f' mit v zugleich verschwindet.

(*) Dieser Ausdruck muß in der hier beschränkten Bedeutung genommen werden. Sonst könnte man auch sagen, die Linie $A' M' B'$ sei von der Linie $A M B$ gleich weit abstehend.

Für jeden gegebenen Werth von x kann nun leicht v (§. 92.) bestimmt werden, wodurch f für x = a bekannt ist.

Dieser Ausdruck findet seine Anwendung, wenn man den Querschnitt oder die Stirnfläche eines gleichdicken Tonnengewölbes berechnen will, dessen innere Wölbung eine Kettenlinie ist.

§. 105.

1. Zusatz. Um zu übersehen, daß die Kurve A′M′B′, welche von AMB in normalen Abständen gleich weit entfernt ist, eine von der Kettenlinie verschiedene Gestalt hat, setze man A′P′ = x′ und den Bogen A′M′ = v′, so ist nach dem vorigen §.

$\partial v' = \frac{r + b}{r} \partial v = \frac{(c^2 + v^2) + bc}{c^2 + v^2} \partial v$, also

$v' = \int \left[\partial v + \frac{bc\,\partial v}{c^2 + v^2}\right] = v + b \text{ Arc tgt } \frac{v}{c}$, oder

$v' = \sqrt{(2cx + x^2)} + b \text{ Arc tgt } \frac{\sqrt{(2cx + x^2)}}{c}$. Aber

$x' = b + x - b\cos\varphi = b + x - \frac{bc}{c + x}$, und hieraus

$x = \frac{x' - b - c}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(x' - b - c)^2}{4} + cx'\right]}$.

Diesen Werth in die Gleichung für v′ statt x gesetzt, giebt eine Gleichung zwischen v′ und x′, welche von der Gleichung für die gemeine Kettenlinie sehr verschieden ist.

Auch kann man noch auf einem andern Wege übersehen, daß es nicht möglich ist, zwei Kettenlinien AMB und A′M′B′ anzugeben, welche in normalen Abständen gleichweit von einander entfernt sind. Denn man setze den Krümmungshalbmesser M′O für das Element M′m′ = r′, so ist §. 99. (III)

$$r' = \frac{c'}{\cos \varphi^2} \text{ und } r = \frac{c}{\cos \varphi^2}, \text{ daher}$$
$$M'M = r' - r = \frac{c' - c}{\cos \varphi^2}.$$

Nun ist der Zähler $c' - c$ eine beständige, der Nenner $\cos \varphi^2$ aber eine veränderliche Größe, daher ist auch der Abstand $M'M$ veränderlich, weil solcher mit dem Winkel φ zugleich wächst.

§. 106.

2. Zusatz. Eben so läßt sich beweisen, daß, wenn AMB, Tafel XIII. Figur 213. des zweiten Bandes, eine Kettenlinie ist, und die normalen Abstände MM' und MM'' durchgängig einander gleich sind, die krummen Linien $A'M'B'$ und $A''M''B''$, welche den Raum $A'B'B''A'' = f'$ begrenzen, von der Kettenlinie verschieden seyn müssen.

Die Bestimmung des Inhalts f' wird in diesem Falle, wo die mittlere Kurve AM eine Kettenlinie ist, sehr einfach, denn es ist hier $M'm'm''M'' = \partial f' = b\partial v$, daher die Fläche

$$f' = bv = b\sqrt{(2cx + x^2)}.$$

§. 107.

Aufgabe. Durch die krumme Linie $A'N$, Tafel XIII. Figur 209. des zweiten Bandes, sei der Raum $AA'NM = f$ dergestalt begrenzt, daß auf der Kettenlinie AM sämmtliche normale Abstände wie $MN = z$ nach einem gewissen Gesetze, von AA' nach MN wachsen; man sucht den Flächeninhalt f. Taf. XIII. Fig. 209.

Auflösung. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnung für die Kettenlinie AM sei der Werth von z durch die Gleichung

$$2rz + z^2 = \frac{2cb + b^2}{\cos\varphi^2}$$

gegeben, so ist, weil §. 99. (III) $\cos\varphi^2 = \frac{c}{r}$,

$$\frac{2rz + z^2}{2r} = \frac{2bc + b^2}{2c}.$$

Nun ist wie §. 104.

$\partial f = \frac{2rz + z^2}{2r}\partial v$, also $= \frac{2bc + b^2}{2c}\partial v$, daher, wenn integrirt wird,

$$f = \frac{2bc + b^2}{2c}.v = \frac{2bc + b^2}{2c}\sqrt{(2cx + x^2)},$$

wo keine Constante hinzukommt.

Für $x = h$ erhält man

$$f = \frac{2bc + b^2}{2c}\sqrt{(2ch + h^2)},$$

welches einen sehr einfachen Ausdruck zur Bestimmung des Flächenraums A A′M′M giebt.

§. 108.

Zusatz. Wäre hingegen zur Bestimmung des Abstandes MM′ = z die Gleichung

$$2rz + z^2 = \frac{2cb + b^2}{(\cos\varphi - n\sin\varphi)^2}$$

gegeben, so ist

$$\frac{2rz + z^2}{2r} = \frac{2bc + b^2}{2r(\cos\varphi - n\sin\varphi)^2},$$

und wenn für r, $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ aus §. 99. (I) und 97. III. IV. die Werthe gesetzt werden, so erhält man

$$\frac{2rz + z^2}{2r} = \frac{bc(2c + b)}{2(c - nv)^2},$$ daher

$$\partial f = \frac{bc(2c + b)}{2}.\frac{\partial v}{(c - nv)^2}.$$

Wird $c - nv = w$ gesetzt, so ist das Integral

$$\int\frac{\partial v}{(c - nv)^2} = \int\frac{-\partial w}{nw^2} = \frac{1}{nw} = \frac{1}{n(c - nv)} + \text{Const.}$$

Für $v = 0$ ist $f = 0$, also Const. $= -\frac{1}{nc}$, daher

$$\int \frac{\partial v}{(c-nv)^2} = \frac{1}{n(c-nv)} + \frac{1}{nc} = \frac{v}{c(c-nv)},$$ folglich der Flächeninhalt

$$f = \frac{(2c+b)bv}{2(c-nv)},$$

wo $v = \sqrt{(2cx+x^2)}$ ist.

§. 109.

Der körperliche Inhalt des Konoids, welches durch die Umdrehung der Kettenfläche AMP, Figur 39., um die Axe AP erzeugt wird, sei Q, so ist das Element dieses Körpers Taf. V. Fig. 39.

$$\partial Q = \pi y^2 \partial x, \text{ also } \frac{Q}{\pi} = \int y^2 \partial x.$$

Aber (P. A. S. 143. §. 38.)

$\int y^2 \partial x = xy^2 - \int 2xy\partial y$ und

$\int xy\partial y = y\int x\partial y - \int(\partial y \int x\partial y)$, also

$$\frac{Q}{\pi} = xy^2 - 2y\int x\partial y + 2\int \partial y \int x\partial y.$$

Nach §. 103. ist

$\int x\partial y = c\sqrt{(2cx+x^2)} - cy$, also

$\int \partial y \int x\partial y = \int c\partial y \sqrt{(2cx+x^2)} - \int cy\partial y$,

oder wenn nach §. 92. (II) $\frac{c\partial x}{\sqrt{(2cx+x^2)}}$ statt ∂y gesetzt wird,

$\int \partial y \int x\partial y = \int c^2\partial x - \int cy\partial y = c^2x - \frac{1}{2}cy^2 + \text{Const.}$,

folglich

$\frac{Q}{\pi} = xy^2 - 2cy\sqrt{(2cx+x^2)} + 2cy^2 + 2c^2x - cy^2$,

wo keine Constante hinzukommt, weil Q und y mit $x = 0$ verschwinden. Es ist daher der gesuchte Inhalt des Konoids

$$Q = \pi [2c^2x + (c+x) y^2 - 2cy \sqrt{(2cx + x^2)}]$$
$$= \pi [2c^2x + (c+x) y^2 - 2cyv].$$

§. 110.

Taf. V. Fig. 39. Die krumme Oberfläche eines durch die Umdrehung der Kettenlinie AM, Figur 39., um die Axe AP entstandenen Konoids sei K, so ist

$K = \int 2\pi y \partial v = 2\pi (vy - \int v \partial y)$. Aber §. 92. II.

$v\partial y = c\partial x$, also $\int v\partial y = \int c\partial x = cx$, daher ist die krumme Oberfläche des Kettenkonoids

$K = 2\pi (vy - cx) = 2\pi [y \sqrt{(2cx + x^2)} - cx]$.

Die Bestimmung von den Schwerpunkten derjenigen Figuren, welche sich auf die Kettenlinie beziehen, findet man im vierten Kapitel. Ueber die Kettenlinie selbst kann man die §. 151. angeführten Eulerschen Abhandlungen nachlesen.

Siebenter Abschnitt.

Von der elastischen Linie.

§. 111.

Was hier unter einem elastischen Körper verstanden wird, kann nach §. 427. des zweiten Bandes als bekannt vorausgesetzt werden. Eben so wird hier, wenn von elastischen Ruthen die Rede ist, und dabei nichts weiter erinnert wird, jederzeit vorausgesetzt, daß solche eine prismatische Gestalt und durchgängig gleiche Elasticität haben, so wie auch bei dieser Untersuchung die vorzüglichsten Lehren der Statik als bekannt angenommen werden.

Befestigt man eine elastische Ruthe an einem oder in mehreren Punkten, so wird solche durch angebrachte Kräfte oder auch schon durch ihr eigenes Gewicht irgend eine Krümmung erhalten, wodurch einige Theile der Ruthe ausgedehnt, andere zusammengedrückt werden. Zwischen diesen müssen sich Theile oder Fasern befinden, welche weder ausgedehnt noch zusammengedrückt sind, und wenn man hiedurch eine Linie zieht, so läßt sich die Krümmung der Ruthe danach beurtheilen. Diese Linie nennt man alsdann eine elastische Linie (Curva elastica), und in dieser Hinsicht ist es statthaft, bei den elastischen Linien die Ruthen ohne Dicke anzunehmen, wie in der Folge geschehn wird.

I. Wenn die elastische Ruthe nur wenig gebogen ist.

§. 112.

Taf. V. Fig. 41. In der vertikalen Wand BC, Figur 41., sei eine gewichtlose elastische Ruthe befestigt, so daß sie in ihrem natürlichen Zustande in die horizontale Lage BT′ fällt; die Lage BMA aber annimmt, wenn an ihrem Ende ein Gewicht Q aufgehängt wird. Man setze voraus, daß die Krümmung der Ruthe AMB nur sehr wenig von der Horizontallinie AC abweiche; nehme für irgend einen Punkt M
x die senkrechten Koordinaten AP = x, PM = y und
y den Bogen AM = v. Die zum Punkte M gehörige Tangente MT schneide die Abscissenaxe unter dem Winkel MTA = ψ, und der Krümmungshalbmesser MR für
r diesen Punkt sei = r. Ferner sei AC = a, CB = u.
a
u Nun ist (nach §. 444. im zweiten Bande der Statik), wenn E^2 die relative Elasticität der Ruthe AM bezeichnet,

$$E^2 = rxQ \quad \text{oder} \quad \frac{E^2}{r} = xQ,$$

wo E^2 eine beständige Größe ist. Nach bekannten Lehren von den Eigenschaften der krummen Linien ist aber, wenn das Element ∂x constant gesetzt wird,

$$r = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y};$$

oder weil hier angenommen wird, daß die Ruthe nur äußerst wenig gebogen ist, so kann man um so mehr das Bogenelement $\partial v = \partial x$ annehmen, je kleiner die Biegung ist. Unter dieser Voraussetzung erhält man daher

$$r = \frac{-\partial x^3}{\partial x \partial^2 y} = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}, \text{ folglich}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - Q x \partial x.$$

Hievon findet man das Integral, weil ∂x constant ist,

$$\frac{E^2}{\partial x} \int \partial^2 y = - Q \int x \partial x, \text{ oder}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = - \tfrac{1}{2} Q x^2 + \text{Const.}$$

Es ist aber $\partial y = \partial x \operatorname{tgt} \psi$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt} \psi$, und weil für $x = a$ der Winkel $\psi = 0$ wird, so erhält man in diesem Falle $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, daher

$$0 = - \tfrac{1}{2} Q a^2 + \text{Const., folglich}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2} (a^2 - x^2) Q \text{ oder } E^2 \partial y = \tfrac{1}{2} (a^2 - x^2) \partial x Q.$$

Wird nochmals integrirt, so ist

$$\text{(I) } E^2 y = \tfrac{1}{2} (a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3) Q \text{ oder } y = (3 a^2 x - x^3) \frac{Q}{6 E^2},$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $x = 0$ auch y verschwindet.

Für $x = a$ wird $y = u$, also

$$6 E^2 u = (3 a^2 - a^2) a Q,$$

man erhält daher die größte Ordinate BC, oder

$$\text{(II) } u = \frac{a^3 Q}{3 E^2}.$$

Weil $E^2 = r x Q$ ist, so findet man den Krümmungshalbmesser für den Punkt M, oder

$$r = \frac{E^2}{x Q}.$$

Setzt man statt E^2 seinen Werth aus (II), so ist auch

$$\text{(III) } r = \frac{a^3}{3 u x}.$$

Für $x = 0$ wird $r = \infty$, also ist die Ruthe im Aufhängepunkte A gar nicht gekrümmt oder grade. Der Krümmungshalbmesser wird desto kleiner, je größer x

wird, und die Ruthe ist am meisten gebogen, wo x seinen größten Werth = a erhält. Für diesen Fall oder im Befestigungspunkte B ist der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{a^2}{3u},$$

welches zugleich der kleinste Krümmungshalbmesser für die gebogene Ruthe ist.

§. 113.

Taf. V. Fig. 41. Statt die elastische Ruthe AMB, Figur 41., an ihrem Ende A mit einem Gewichte zu belasten, setze man voraus, daß sie lediglich durch ihr eigenes auf ihre ganze Länge gleichförmig verbreitetes Gewicht gebogen werde, ohne daß an ihrem Ende noch ein Gewicht aufgehängt sei. Wird hier nun ebenfalls die Ruthe nur äußerst wenig gebogen angenommen, und werden die übrigen Bezeichnungen des vorigen §. beibehalten, so sei das Gewicht von den einzelnen Längen der Ruthe den zugehörigen Längen

G der Horizontale AC proportional. Ist nun G das Gewicht von jedem Fuße der Ruthe, so erhält man das Gewicht von AM = xG, und das Gewicht der ganzen Ruthe AMB = aG.

Für den Punkt M ist die Summe aller Momente von M bis A = $\frac{1}{2}x \cdot xG$, also §. 112.

$E^2 = r \cdot \frac{1}{2}x^2G$, oder man findet, weil §. 112.

$r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$ ist,

$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - \frac{1}{2}Gx^2 \partial x$, und hievon das Integral

$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = - \frac{1}{6}Gx^3 + \text{Const.}$

Aber $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, und weil für x = a der Winkel

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - Q x \partial x.$$

Hievon findet man das Integral, weil ∂x constant ist,

$$\frac{E^2}{\partial x} \int \partial^2 y = - Q \int x \partial x, \text{ oder}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = - \tfrac{1}{2} Q x^2 + \text{Const.}$$

Es ist aber $\partial y = \partial x \operatorname{tgt} \psi$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt} \psi$, und weil für $x = a$ der Winkel $\psi = o$ wird, so erhält man in diesem Falle $\frac{\partial y}{\partial x} = o$, daher

$$o = - \tfrac{1}{2} Q a^2 + \text{Const.}, \text{ folglich}$$

$$E^2 \frac{\partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{2} (a^2 - x^2) Q \text{ oder } E^2 \partial y = \tfrac{1}{2} (a^2 - x^2) \partial x Q.$$

Wird nochmals integrirt, so ist

$$\text{(I) } E^2 y = \tfrac{1}{2} (a^2 x - \tfrac{1}{3} x^3) Q \text{ oder } y = (3 a^2 x - x^3) \frac{Q}{6 E^2},$$

wo keine Constante hinzukommt, weil für $x = o$ auch y verschwindet.

Für $x = a$ wird $y = u$, also

$$6 E^2 u = (3 a^2 - a^2) a Q,$$

man erhält daher die größte Ordinate BC, oder

$$\text{(II) } u = \frac{a^3 Q}{3 E^2}.$$

Weil $E^2 = r x Q$ ist, so findet man den Krümmungshalbmesser für den Punkt M, oder

$$r = \frac{E^2}{x Q}.$$

Setzt man statt E^2 seinen Werth aus (II), so ist auch

$$\text{(III) } r = \frac{a^3}{3 u x}.$$

Für $x = o$ wird $r = \infty$, also ist die Ruthe im Aufhängepunkte A gar nicht gekrümmt oder grade. Der Krümmungshalbmesser wird desto kleiner, je größer x

Nimmt man nun an, daß das Gewicht der schweren Ruthe eben so groß sei, als die Last Q am Ende der gewichtlosen Ruthe, so erhält man a G = Q, oder

$$G = \frac{Q}{a}, \text{ also } y = (4a^3x - x^4)\,\frac{Q}{24\,a\,E^2},$$

woraus folgt, daß die beiden krummen Linien, welche die Ruthe bildet, wenn an ihrem Ende eine Last Q aufgehängt, oder wenn diese Last auf der ganzen Ruthe gleichförmig vertheilt wird, für einerlei Länge a, von einander verschieden sind.

Für die gewichtlose Ruthe findet man die größte Ordinate §. 112. (II).

$$u = \frac{a^3 Q}{3 E^2},$$

und für die schwere Ruthe, wenn §. 113. (II) a G = Q, also $\frac{Q}{a}$ statt G gesetzt wird, oder wenn man annimmt, das Gewicht Q sei auf der Ruthe gleichförmig verbreitet,

$$u = \frac{a^3 Q}{8 E^2},$$

woraus folgt, daß sich die größte Ordinate bei der gewichtlosen an ihrem Ende belasteten Ruthe zur größten Ordinate der schweren Ruthe, unter übrigens gleichen Umständen, wie 8 zu 3 verhält.

Bei der gewichtlosen Ruthe ist der kleinste Krümmungshalbmesser im Punkte B, §. 112.

$$= \frac{a^2}{3\,u},$$

und bei der schweren Ruthe ist dieser kleinste Krümmungshalbmesser §. 113.

$$= \frac{a^2}{4\,u};$$

also

also wird die an ihrem Ende belastete Ruthe an ihrem Befestigungspunkte B weit stärker gebogen, als wenn man dieses Gewicht auf die ganze Ruthe verbreitet hätte.

Wollte man am Ende A der gewichtlosen Ruthe ein Gewicht q aufhängen, welches die Ruthe bei B eben so biegt, als wenn die Last Q auf der ganzen Ruthe gleichförmig verbreitet wäre, so muß in beiden Fällen der Krümmungshalbmesser bei B gleich groß seyn. Nun ist für das Gewicht q dieser Krümmungshalbmesser $= \frac{E^2}{a\,q}$ (§. 112.), und für das auf der Ruthe verbreitete Gewicht Q ist dieser Krümmungshalbmesser $= \frac{2\,E^2}{a\,Q}$ (§. 113.), daher $\frac{2\,E^2}{a\,Q} = \frac{E^2}{a\,q}$, folglich $q = \frac{1}{2}\,Q$.

oder eine gewichtlose elastische Ruthe wird an ihrem Befestigungspunkte, durch ein an ihrem Ende aufgehängtes Gewicht, eben so gekrümmt, als wenn man das doppelte Gewicht auf ihre ganze Länge gleichförmig verbreitet hätte.

§. 115.

In der festen vertikalen Wand CE, Figur 42., sei eine gewichtlose elastische Ruthe so befestigt, daß ihre Richtung im natürlichen Zustande in die grade Linie A′B′ fällt. Auch soll die Ruthe auf einer Seite der Wand CE, welche hier ohne Dicke vorausgesetzt wird, gebogen werden können, ohne daß solches auf die Biegung der andern Seite Einfluß hat. Durch die Gewichte Q in A, Q′ in B, werde die Ruthe aus der Lage A′CB′ in die Lage ACB gebracht, und man nehme an, daß sich die aufgehängten Gewichte umgekehrt wie ihre Abstände von der

Taf. V. Fig. 42.

vertikalen Wand verhalten, oder wenn $AD = x$, $BE = x'$ ist, daß $xQ = x'Q'$ werde. Für den Bogen AC sei r der Krümmungshalbmesser in C, und auf der andern Seite der Wand für BC in $C = r'$, so ist §. 112.

$$E^2 = rxQ \text{ und } E^2 = r'x'Q',$$

weil E^2 für beide Ruthen einerlei ist. Man erhält daher $rxQ = r'x'Q'$, oder weil $xQ = x'Q'$ ist, so wird $r = r'$, also ist die Ruthe AB auf beiden Seiten unmittelbar an der Wand CE auf einerlei Weise gekrümmt, es müssen sich daher die Spannungen der Fibern bei C von beiden Seiten im Gleichgewichte halten, und wenn die Ruthe nur in einem einzigen Punkte bei C so befestigt wird, daß sie sich um denselben frei drehen kann, ohne auszuweichen, so kann die Wand CE weggenommen werden, und Q bleibt noch im Gleichgewichte mit Q', oder die Ruthe behält ihre vorige Krümmung. Der feste Punkt bei C leidet vertikal unterwärts einen Druck $= Q + Q'$, und wenn die Enden A und B durch Stifte befestigt, und die Gewichte Q, Q', weggenommen werden, so leidet A einen vertikalen Druck Q aufwärts, und B einen Druck Q' nach einer damit parallelen Richtung. Statt des Stifts bei C, welcher mit der Kraft $Q + Q'$ unterwärts gedrückt wird, kann man nun eine Kraft $P = Q + Q'$ vertikal aufwärts anbringen, und es muß noch alles im Gleichgewichte seyn.

Denkt man nun die Ruthe AB umgedreht, so daß sie nach unten gebogen ist, so sind A, B die Unterstützungspunkte der Ruthe, an welchen sie befestigt ist, und in C hängt abwärts eine Last $P = Q + Q'$, welche auf das Ende bei A den vertikalen Druck Q, und bei B den Ver-

tikaldruck Q' verursacht. Hieraus folgt, daß wenn eine an beiden Enden unterstützte Ruthe in irgend einem Punkte belastet wird, so muß sie eben so gebogen werden, als wenn an den Enden derselben Kräfte angebracht wären, welche den Pressungen auf die Unterstützungspunkte gleich sind. Auch werden diese Vertikalpressungen eben so wie am Hebel nach der Lehre von der Gleichheit der Momente bestimmt.

Eben diese Folgerungen erhält man, wenn vorausgesetzt wird, daß die elastische Ruthe durch ihr eigenes Gewicht gebogen werde. (§. 113.)

§. 116.

Aufgabe. Eine gewichtlose elastische Ruthe AMB, Figur 43., ist an ihren Enden A, B, welche in einerlei Horizonte liegen, unterstützt, und bei K mit einem Gewichte P belastet; man sucht die Gestalt der Kurve AMB, wenn vorausgesetzt wird, daß die Krümmung derselben nur wenig von der graden Linie abweicht. Taf. V. Fig. 43.

Auflösung. Für irgend einen Punkt M zwischen AK sei MP senkrecht auf AB, und die verlängerte Richtung der Kraft P schneide AB in D. Man setze AP = x, PM = y, AD = a, AB = c, und wenn KT die Tangente für den Punkt K ist, den Winkel ATK = ψ. Der Vertikaldruck auf die Unterstützung bei A sei = Q, auf B = Q', so werden gleiche Kräfte Q, Q' in A, B, vertikal aufwärts angebracht, die Stützen entbehrlich machen.

Wegen des nöthigen Gleichgewichts erhält man §. 115.

$$cQ = (c - a)P, \text{ also } Q = \frac{c-a}{c}P.$$

Nach §. 112. ist ferner $E^2 = rM$, oder weil nach demselben §. $r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$ ist, so erhält man

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - M \partial x.$$

Für den Punkt M erhält man das Moment

$$M = xQ = \frac{(c-a)\,x}{c} P, \text{ daher}$$

$$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = - \frac{(c-a)\,x \partial x}{c} P.$$

Wird integrirt, so findet man, weil ∂x constant ist,

$$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = - \frac{(c-a)\,x^2}{2c} P + \text{Const.}$$

Für $x = a$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, also

$$\text{Const} = E^2 \text{tgt}\,\psi + \frac{a^2\,(c-a)}{2c} P, \text{ daher,}$$

wenn mit $6c\partial x$ multiplizirt wird,

$$6cE^2\partial y = 3(c-a)(a^2-x^2)\partial x P + 6c\partial x E^2 \text{tgt}\,\psi.$$

Integrirt man nochmals, so ist

$$6cE^2 y = (c-a)(3a^2-x^2)xP + 6cxE^2 \text{tgt}\,\psi \text{ [I]},$$

wo keine Constante hinzukommt, weil x mit y zugleich verschwindet.

u Man setze $DK = u$, so wird $y = u$ für $x = a$, also

$$6cE^2 u = 2(c-a)\,a^3 P + 6acE^2 \text{tgt}\,\psi \text{ [II]}.$$

Um auch eine Gleichung für die Kurve KM′B zu erhalten, setze man $DP' = x'$, $P'M' = y'$, so ist für den Punkt M′ das Moment

x′ y′

$$M = P'B \,.\, Q' = (c-a-x')\,Q',$$

oder weil $cQ' = aP$, also $Q' = \frac{a}{c} P$, so wird

$$M = \frac{a\,(c-a-x')}{c} P, \text{ also}$$

$\frac{E^2 \partial^2 y'}{\partial x'} = - \frac{a(c-a-x')\partial x'}{c} P$; davon das Integral, giebt

$$\frac{E^2 \partial y'}{\partial x'} = - \frac{a(c-a-\frac{1}{2}x')x'}{c} P + \text{Const.}$$

Für $x' = o$ wird $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \text{tgt}\,\psi$, also

Const. $= E^2 \text{tgt}\,\psi$, daher, wenn durchgängig mit $6c\partial x'$ multiplizirt wird,

$$6cE^2\partial y' = -3a(2c-2a-x')x'\partial x'P + 6c\partial x'E^2\text{tgt}\,\psi,$$

und wenn man nochmals integrirt,

$$6cE^2y' = -a(3c-3a-x')x'^2P + 6cx'E^2\text{tgt}\,\psi + \text{Const.}$$

Für $x' = o$ wird $y' = u$, also Const. $= 6cE^2u$, daher

$$6cE^2y' = 6cE^2u - a(3c-3a-x')x'^2P + 6cx'E^2\text{tgt}\,\psi \; [III].$$

Für $x' = c - a$ wird $y' = o$, daher

$$6cE^2u = 2a(c-a)^3P - 6c(c-a)E^2\text{tgt}\,\psi \; [IV].$$

Wird dieser Ausdruck von [II] abgezogen, so erhält man nach gehöriger Entwickelung

$$6cE^2\text{tgt}\,\psi = 2a(c-a)(c-2a)P \; [V]$$

und diesen Ausdruck in [IV] statt $6cE^2 \text{tgt}\,\psi$ gesetzt, giebt

$$6cE^2u = 2a^2(c-a)^2P \; [VI], \text{ also auch}$$

$$6cE^2 = \frac{2a^2(c-a)^2}{u} P \; [VII].$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke [V. VI. VII.] in die Gleichungen [I] und [III], so erhält man, wenn u bekannt ist, nachstehende Gleichungen für die Gestalt der krummen Linie AKB,

$$(I) \; y = \frac{a(2c-a) - x^2}{2a^2(c-a)} ux.$$

$$(II) \; y' = u + \frac{(c-2a)u}{a(c-a)} x' - \frac{3u}{2a(c-a)} x'^2 + \frac{u}{2a(c-a)^2} x'^3.$$

Endlich erhält man noch aus [V]

$$(\text{III})\ \text{tgt}\,\psi = \frac{(c-2a)\,u}{a\,(c-a)},\ \text{und aus [VI]}$$

$$(\text{IV})\ u = \frac{a^2\,(c-a)^2}{3cE^2}\,P.$$

Bei dem Gebrauche der Gleichungen (I) und (II) ist wohl zu bemerken, daß x nicht größer als a, und y' nicht größer als c — a genommen werden darf, wie es die Bedingungen der Gleichungen erfordern.

§. 117.

1. Zusatz. Um denjenigen Punkt der gebogenen Ruthe auszumitteln, welcher am weitesten von der Horizontale AB entfernt ist, darf man nur die größte Ordinate aufsuchen. Nun ist nach (I) und (II)

Taf. V. Fig. 43.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a\,(2c-a)\,u - 3ux^2}{2a^2\,(c-a)},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{3ux}{a^2\,(c-a)},$$

$$\frac{\partial y'}{\partial x'} = \frac{(c-2a)\,u}{a\,(c-a)} - \frac{3ux'}{a\,(c-a)} + \frac{3ux'^2}{2a\,(c-a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2} = \frac{3ux'}{a\,(c-a)^2} - \frac{3u}{a\,(c-a)} = \frac{-3u\,(c-a-x')}{a\,(c-a)^2}.$$

Da nun $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 y'}{\partial x'^2}$ für jeden positiven Werth von x und x' negativ werden, so erhält man hienach für y und y' größte Werthe.

Die erste Gleichung giebt zur Bestimmung des größten Werths für y

$$0 = \frac{a\,(2c-a)\,u - 3ux^2}{2a^2\,(c-a)}\ \text{oder}\ 3ux^2 = a\,(2c-a)\,u,\ \text{daher}$$

$$x = \sqrt{\frac{a\,(2c-a)}{3}},$$

und weil x nicht größer als a, also $\frac{a\,(2c-a)}{3}$ nicht grö-

ßer als a^2, oder c nicht größer als 2 a werden kann, so giebt es nur ein Größtes für y, wenn c nicht größer als 2 a ist. Wenn hingegen c größer als 2 a wird, oder wenn der Punkt D, Figur 43., näher bei A als bei B liegt, so giebt es zwischen A und D kein Größtes für y. Taf. V. Fig. 43.

Den größten Werth für y' zu finden, setze man

$\frac{\partial y'}{\partial x'} = 0 = \frac{(c-2a)u}{a(c-a)} - \frac{3ux'}{a(c-a)} + \frac{3ux'^2}{2a(c-a)^2}$, also

$$x' = (c-a) \pm \sqrt{[\tfrac{1}{3}(c-a)(c+a)]}.$$

Weil nun x' nicht größer als $(c-a)$ werden darf, so muß das Zeichen vor der Wurzel negativ seyn. Damit aber x' nicht negativ werde, so muß $\frac{1}{3}(c+a)$ nicht größer als $(c-a)$ oder a nicht größer als $\frac{1}{2}c$ werden. Es kann daher nur ein Größtes zwische D und B statt finden, wenn a nicht größer als $\frac{1}{2}c$ ist.

Hieraus folgt überhaupt, daß der tiefste Punkt der gebogenen Ruthe allemal zwischen den Aufhängepunkt und denjenigen Unterstützungspunkt fällt, welcher am weitesten vom Aufhängepunkte entfernt ist.

Fällt die Last P in die Mitte zwischen die Unterstützungspunkte, so ist für die größten Werthe von y und y', weil alsdann $c = 2a$ ist,

$$x = a \text{ und } x' = 0,$$

oder der tiefste Punkt fällt alsdann in die Mitte der Ruthe.

§. 118.

2. Zusatz. Für jede Stelle der Kurve findet man (§. 116.) den Krümmungshalbmesser $r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$, daher ist derselbe

von A bis K, $r = \frac{a^2 (c - a)}{3ux}$,

von K bis B, $r = \frac{a (c - a)^2}{3u (c - a - x')}$.

Der Krümmungshalbmesser wird daher am kleinsten, wenn x seinen größten oder x' seinen kleinsten Werth erhält. Da dies nun für $x = a$ und für $x' = 0$ der Fall ist, so folgt hieraus, daß die krumme Linie AKM bei K, wo das Gewicht P aufgehängt ist, am meisten gekrümmt wird.

Für $x = 0$ und für $x' = c - a$ wird $r = \infty$, oder bei den Unterstützungspunkten A, B hat die Kurve keine Krümmung, sondern geht in eine grade Linie über.

In der Stelle K, wo das Gewicht P aufgehängt ist, wird $x = a$ oder $x' = 0$, daher ist daselbst der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{a (c - a)}{3u},$$

oder wenn man aus §. 116. (IV) statt u seinen Werth setzt,

$$= \frac{cE^2}{a (c - a) P}.$$

Weil nun für alle Werthe, welche a erhalten kann, das Produkt $a (c - a)$ am größten wird, wenn man $a = \frac{1}{2} c$ setzt, so folgt daraus, daß unter übrigens gleichen Umständen die elastische Ruthe am Aufhängepunkte die stärkste Krümmung erhält, wenn man die Last in der Mitte aufhängt.

§. 119.

3. Zusatz. Hängt das Gewicht P in der Mitte der Ruthe, so ist $c = 2a$, also §. 116.

$$(\text{I})\ y = \frac{3u}{2a}x - \frac{u}{2a^3}x^3, \text{ und}$$

$$y' = u - \frac{3u}{2a^2}x'^2 + \frac{u}{2a^3}x'^3.$$

Man nehme, Figur 43., $DP = DP' = x'$, so wird $AP = a - x'$, setzt man diesen Werth statt x in (I), so erhält man Taf. V. Fig. 43.

$$PM = y = u - \frac{3u}{2a^2}x'^2 + \frac{u}{2a^3}x'^3 = y',$$

woraus folgt, daß beide Schenkel KA und KB einander gleich und ähnlich sind, oder daß die gebogene Ruthe eine symmetrische krumme Linie bildet, deren Axe durch den Aufhängepunkt K geht. Auch ist die Gleichung (I) zur Bestimmung der Natur dieser krummen Linie allein hinreichend.

Für $c = 2a$ §. 116. [VI] erhält man die relative Elasticität

$$(\text{II})\ E^2 = \frac{a^3}{6u}P = \frac{c^3 P}{48u},$$

so daß E^2 leicht aus einem Versuche, für jede Materie der Ruthe, bestimmt werden kann.

Weil der Krümmungshalbmesser $r = \frac{a^2(c-a)}{3ux}$ ist, so erhält man hier $r = \frac{a^3}{3ux}$, daher ist der Krümmungshalbmesser im Aufhängepunkte

$$= \frac{a^2}{3u} = \frac{c^2}{12u},$$

oder wenn man statt u seinen Werth $\frac{a^3 P}{6E^2}$ setzt,

$$= \frac{2E^2}{aP} = \frac{4E^2}{cP},$$

welches zugleich der kleinste Werth für den Krümmungshalbmesser ist.

Weil der Druck auf jeden Unterstützungspunkt $= Q$, also $P = 2Q$ ist, so erhält man auch $u = \frac{a^3 Q}{3E^2}$, und wenn dieser Werth in die Gleichung (I) gesetzt wird, so ist auch

$$(III)\ y = \frac{Q}{6E^2}(3a^2x - x^3).$$

§. 120.

Aufgabe. Die krumme Linie einer durch ihr eigenes Gewicht gebogenen elastischen Ruthe zu finden, wenn solche durch kein anderes Gewicht belastet ist.

Auflösung. Weil hier nur eine geringe Biegung vorausgesetzt wird, so sei das Gewicht von den einzelnen
Taf. V. Fig. 44. Längen der Ruthe AMB, Figur 44., den zugehörigen Längen der Horizontale AB proportional. Ist nun G das
G Gewicht von jedem Fuße der Ruthe, und man setzt
x y c $AP = x$, $PM = y$, $AB = c$, so ist das Gewicht von $AM = xG$, und das Gewicht der ganzen Ruthe $= cG$.

Die Stützen bei A und B werden jede mit dem halben Gewichte der Ruthe gedrückt, man kann daher die Stütze bei B wegnehmen, wenn an ihre Stelle die Kraft $Q = \frac{1}{2}cG$ vertikal aufwärts angebracht wird, und das andere Ende bei A unterstützt bleibt. Weil alle Kräfte im Gleichgewichte sind, so muß dies auch noch bestehen, wenn der Punkt M befestigt wird. Alsdann strebt das Gewicht des Bogens $MB = (c - x)G$, dessen Moment $\frac{1}{2}(c - x)^2 G$ ist, die Ruthe MB nach einer Seite, und die Kraft $Q = \frac{1}{2}cG$ nach der entgegengesetzten Seite zu drehen; es sind daher die Momente der Kräfte für den Punkt M, oder

$M = \frac{1}{2}c(c-x)G - \frac{1}{2}(c-x)^2 G = \frac{1}{2}x(c-x)G$,
also §. 112.

$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = -\frac{1}{2}x(c-x)\partial x G$. Dies integrirt, giebt

$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}cx^2)G + \text{Const.}$

Für $x = c$ sei $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tgt}\,\psi$, so ist

$$\text{Const.} = E^2 \,\text{tgt}\,\psi - \frac{1}{6}c^3 + \frac{1}{4}c^3,$$

daher, wenn durchgängig mit $24\partial x$ multiplizirt wird,

$24E^2\partial y = 2(2x^3 - 3cx^2 + c^3)\partial x G + 24\partial x E^2 \,\text{tgt}\,\psi$.

Wird nochmals integrirt, so ist

$24E^2 y = (x^4 - 2cx^3 + 2c^3x)G + 24xE^2 \,\text{tgt}\,\psi$,

wo keine Constante hinzukommt, weil y mit $x = o$ verschwindet. Für $x = c$ wird $y = o$, also

$24E^2 c \,\text{tgt}\,\psi = -c^4 G$, daher $24E^2 \,\text{tgt}\,\psi = -c^3 G$,

$$\text{(I)} \quad 24E^2 y = (x^4 - 2cx^3 + c^3x)G.$$

Man setze, daß für $x = \frac{1}{2}c = AF$ die zugehörige Ordinate $y = u = FH$ werde, so ist

$24E^2 u = \frac{5c^4}{16}G$ oder $24E^2 = \frac{5c^4}{16u}G$, daher, wenn dieser Werth in (I) gesetzt wird,

$$\text{(II)} \quad y = \frac{16}{5}(x^4 - 2cx^3 + c^3x)\frac{u}{c^4}.$$

Wird in diese Gleichung $c - x$ statt x gesetzt, so erhält y eben denselben Werth, als wenn x unverändert stehen bleibt; es folgt also, daß die Axe HF die Kurve AHB in zwei gleiche und ähnliche Schenkel AH und BH eintheilt. Es ist daher auch

$$u = \frac{5c^4}{384E^2}G$$

die größte Ordinate, welche der Abscisse $x = \frac{1}{2}c$ entspricht.

§. 121.

Zusatz. Der Krümmungshalbmesser ist nach §. 116. $r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y}$. Weil nach (II)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{16\,u}{5c^4}\,(4x^3 - 6\,c\,x^2 + c^3)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\,\frac{192\,u\,(c - x)\,x}{5c^4}$$ ist, so erhält man

$$r = \frac{5\,c^4}{192\,u\,(c - x)\,x}.$$

Für $x = 0$ und $x = c$ wird $r = \infty$, daher geht die Krümmung der Ruthe bei den Unterstützungspunkten A und B in eine grade Linie über.

Für $x = \frac{1}{2}c$ erhält $(c - x)\,x$ seinen größten Werth, daher ist die Ruthe in der Mitte am meisten gekrümmt, und man findet den Krümmungshalbmesser, welcher der Mitte zugehört,

$$= \frac{5\,c^2}{48\,u},$$

oder wenn statt u sein Werth aus §. 120. gesetzt wird,

$$= \frac{8\,E^2}{c^2\,G}.$$

§. 122.

Vergleicht man die Kurve, welche entsteht, wenn eine Ruthe ohne Schwere in ihrer Mitte durch ein Gewicht gebogen wird, mit derjenigen, welche eine schwere, aber nicht mit einem aufgehängten Gewichte belastete Ruthe durch ihr eigenes Gewicht bildet, so findet sich, daß beide für gleiche Belastung von einander verschieden sind. Ist P das Gewicht, welches an der Ruthe ohne Schwere in der Mitte aufgehängt ist, und cG das Gewicht der schweren Ruthe, so ist in dem Falle, daß $cG = P$

und c = 2a gesetzt wird, für die schwere Ruthe die größte Senkung (§. 120.)

$$u = \frac{5c^3}{384 E^2} cG = \frac{5c^3}{384 E^2} P,$$

und nach §. 119. (II) für die gleich große gewichtlose Ruthe, an welcher das Gewicht P aufgehängt ist,

$$u = \frac{c^3}{48 E^2} P = \frac{8c^3}{384 E^2} P.$$

Es folgt hieraus, daß sich unter den angenommenen Voraussetzungen die größten Ordinaten wie 5 zu 8 verhalten, oder wenn man eine Last auf einer Ruthe gleichförmig vertheilt, so wird der größte Abstand von ihrer ursprünglichen Lage nur $\frac{5}{8}$ von demjenigen Abstande betragen, welcher entsteht, wenn man die vertheilte Last in ihrer Mitte aufgehängt hätte.

Für die schwere Ruthe ist nach §. 121. der Krümmungshalbmesser in ihrer Mitte

$$r = \frac{8 E^2}{c^2 G} = \frac{4 E^2}{a P},$$

und nach §. 119. für die gleich große gewichtlose Ruthe, an welcher das Gewicht P in der Mitte aufgehängt ist,

$$r = \frac{2 E^2}{a P}.$$

Der Krümmungshalbmesser ist daher in der Mitte einer Ruthe, auf welcher man das Gewicht P gleichförmig verbreitet, doppelt so groß, als wenn die Last P in der Mitte der Ruthe aufgehängt wird. Oder eine Ruthe, auf welcher die Last gleichförmig verbreitet wird, erhält in ihrer Mitte eben die Krümmung, als wenn man die Hälfte der Last in einen einzigen Punkt ihrer Mitte vereinigt aufhängt.

§. 123.

Aufgabe. Ein gleichförmig schwerer elastischer Balken ist in drei Punkten unterstützt, und zwischen jeden zwei Unterstützungspunkten mit einem Gewichte belastet; man sucht den Druck auf jeden Unterstützungspunkt, wenn vorausgesetzt wird, daß die Biegung des Balkens nur äußerst wenig von der graden Linie abweiche.

Taf. V. Fig. 45.

Auflösung. Der Balken AHBKC, Figur 45., sei in den Punkten A, B, C, welche in einerlei Horizonte liegen, unterstützt, und in H und K mit Gewichten P und P' belastet. Jeder Fuß von der Länge des Balkens wiege G Pfund, und es sei der Druck auf $A = Q$, auf $B = Q'$, auf $C = Q''$. Ferner $AD = a$, $AF = b$, $AB = c$, $AC = e$; der Winkel, welchen die zum Punkte H gehörige Tangente HT mit AT bildet, oder $ATH = \psi$; eben so für den Punkt K der Winkel $KT'C = \psi'$, und der Winkel, unter welchem die zum Punkte B gehörige Tangente der Kurve die Linie AC schneidet, $= \psi''$. Man nehme für die unbestimmten Punkte M, M', M'', M''' der Bogen AH, HB, BK, KC die senkrechten Koordinaten $AP = x$, $PM = y$; $DP' = x'$, $P'M' = y'$; $BP'' = x''$, $P''M'' = y''$; $FP''' = x'''$, $P'''M''' = y'''$. Das ganze Gewicht des Balkens sei eG, also des Theils $MC = (e - x)G$.

P P' G Q a b c e ψ ψ' x y G

Werden die Unterstützungen in B und C weggenommen, und statt derselben die Kräfte Q' und Q'' angebracht, welche mit P, P' und $(e - x)G$ nach entgegengesetzten Richtungen wirken, so kann der ganze Balken so angesehn werden, als wenn derselbe in A und M befestigt wäre, und die Kräfte Q', Q''; P, P', $(e - x)G$ müssen noch

im Gleichgewichte bleiben. Für den Punkt M findet man daher die Momente dieser Kräfte, oder

$$M = (c-x)Q' + (e-x)Q'' - (a-x)P - (b-x)P' - \tfrac{1}{2}(e-x)^2 G;$$

Nun ist für das erforderliche Gleichgewicht:

$Q + Q' + Q'' = P + P' + eG$ [I] und

$cQ' + eQ'' = aP + bP' + \tfrac{1}{2}e^2 G$ [II],

daher $M = x(Q - \tfrac{1}{2}xG)$, folglich §. 116.

$\frac{E^2 \partial^2 y}{\partial x} = \tfrac{1}{2}x^2 G \partial x - xQ\partial x$; davon das Integral

$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{6}x^3 G - \tfrac{1}{2}x^2 Q + \text{Const.}$

Für $x = a$ wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt}\psi$, also

$\frac{E^2 \partial y}{\partial x} = \tfrac{1}{6}(x^3 - a^3)G - \tfrac{1}{2}(x^2 - a^2)Q + E^2 \operatorname{tgt}\psi$,

und wenn nochmals integrirt wird,

$E^2 y = \tfrac{1}{2}(a^2 - \tfrac{1}{3}x^2)xQ - \tfrac{1}{6}(a^3 - \tfrac{1}{4}x^3)xG + xE^2 \operatorname{tgt}\psi$ [III],

wo keine Constante hinzukommt, weil y mit $x = 0$ verschwindet.

Für $x = a$ werde $y = u$, so ist

$E^2 u = \tfrac{1}{3}a^3 Q - \tfrac{1}{8}a^4 G + aE^2 \operatorname{tgt}\psi$ [IV].

Denkt man sich nun eben so wie vorhin bei M jetzt den Punkt M' befestigt, so findet man die Momente der Kräfte für diesen Punkt, oder

$$M = (c-a-x')Q' + (e-a-x')Q'' - (b-a-x')P' - \tfrac{1}{2}(e-a-x')^2 G$$

oder nach [I] und [II]

$M = (a+x')Q - x'P - \tfrac{1}{2}(a+x')^2 G$, daher §. 116.

$\frac{E^2 \partial^2 y'}{\partial x'^2} = x'P + \tfrac{1}{2}(a+x')^2 G - (a+x')Q.$

Dies integrirt, giebt

$\frac{E^2 \partial y'}{\partial x'} = \tfrac{1}{2}x'^2 P + \tfrac{1}{2}x'(a^2 + ax' + \tfrac{1}{3}x'^2)G - x'(a + \tfrac{1}{2}x')Q + \text{Const.}$

Für $x' = 0$ wird $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \operatorname{tgt} \psi$, also

$$\frac{E^2 \partial y'}{\partial x'} = \tfrac{1}{2} x'^2 P + \tfrac{1}{2} x' (a^2 + a x' + \tfrac{1}{3} x'^2) G - x' (a + \tfrac{1}{2} x') Q + E^2 \operatorname{tgt} \psi,$$

und nochmals integrirt, giebt

$$E^2 y' = \tfrac{1}{6} x'^3 P + \tfrac{1}{2} x'^2 (\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{3} a x' + \tfrac{1}{12} x'^2) G - \tfrac{1}{2} x'^2 (a + \tfrac{1}{3} x') Q$$
$$+ x' E^2 \operatorname{tgt} \psi + \text{Const.}$$

Für $x' = 0$ wird $y' = u$, also

$$E^2 y' = \tfrac{1}{6} x'^3 P + \tfrac{1}{2} x'^2 (\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{3} a x' + \tfrac{1}{12} x'^2) G - \tfrac{1}{2} x'^2 (a + \tfrac{1}{3} x') Q$$
$$+ x' E^2 \operatorname{tgt} \psi + E^2 u \text{ [V].}$$

Für $x' = c - a$ wird $y' = 0$, also

$$0 = \tfrac{1}{6} (c - a)^3 P + \tfrac{1}{4} (c - a)^2 (\tfrac{1}{2} a^2 + \tfrac{1}{3} a c + \tfrac{1}{6} c^2) G - \tfrac{1}{6} (c - a)^2 (2a + c) Q$$
$$+ (c - a) E^2 \operatorname{tgt} \psi + E^2 u. \text{ [VI]}$$

Für $x' = c - a$ wird $\frac{\partial y'}{\partial x'} = \operatorname{tgt} \psi''$, daher

$$E^2 \operatorname{tgt} \psi'' = \tfrac{1}{2} (c - a)^2 P + \tfrac{1}{6} (c - a) (a^2 + a c + c^2) G - \tfrac{1}{2} (c - a) (c + a) Q$$
$$+ E^2 \operatorname{tgt} \psi \text{ [VII].}$$

Für den Punkt M'' erhält man die Momente

$$M = (e - c - x'') Q'' - (b - c - x'') P' - \tfrac{1}{2} (e - c - x'')^2 G,$$

daher

$$\frac{E^2 \partial^2 y''}{\partial x''^2} = (b - c) P' - x'' P' + \tfrac{1}{2} (e - c - x'')^2 G - (e - c) Q'' + x'' Q'',$$

dies integrirt, giebt

$$\frac{E^2 \partial y''}{\partial x''} = (b - c) x'' P' - \tfrac{1}{2} x''^2 P' + \tfrac{1}{2} (e - c)^2 x'' G - \tfrac{1}{2} (e - c) x''^2 G + \tfrac{1}{6} x''^3 G$$
$$- (e - c) x'' Q'' + \tfrac{1}{2} x''^2 Q'' + \text{Const.}$$

Für $x'' = 0$ wird $\frac{\partial y''}{\partial x''} = \operatorname{tgt} \psi''$, also

Const. $= E^2 \operatorname{tgt} \psi''$. Diesen Werth in die Gleichung gesetzt und integrirt, giebt

$$E^2 y'' = \tfrac{1}{2} (b - c) x''^2 P' - \tfrac{1}{6} x''^3 P' + \tfrac{1}{4} (e - c)^2 x''^2 G - \tfrac{1}{6} (e - c) x''^3 G$$
$$+ \tfrac{1}{24} x''^4 G - \tfrac{1}{2} (e - c) x''^2 Q'' + \tfrac{1}{6} x''^3 Q'' + x'' E^2 \operatorname{tgt} \psi'' \text{ [VIII]}$$

wo keine Constante hinzukommt.

Für

Für $x'' = b - c$ werde $y'' = w$, so ist

$$E^2 w = \tfrac{1}{3}(b-c)^3 P' + (b-c)^2 [\tfrac{1}{4}(e-c)^2 + \tfrac{1}{24}(b-c)^2 - \tfrac{1}{6}(b-c)(e-c)] G$$
$$- \tfrac{1}{2}(e-c)(b-c)^2 Q'' + \tfrac{1}{6}(b-c)^3 Q'' + (b-c) E^2 \operatorname{tgt} \psi'' \quad [IX]$$

Für $x'' = b - c$ wird $\frac{\partial y''}{\partial x''} = \operatorname{tgt} \psi'$, daher

$$E^2 \operatorname{tgt} \psi' = \tfrac{1}{2}(b-c)^2 P' + \tfrac{1}{2}(b-c)[\tfrac{1}{3}(b-c)^2 + (e-b)(e-c)] G$$
$$- (e-c)(b-c) Q'' + \tfrac{1}{2}(b-c)^2 Q'' + E^2 \operatorname{tgt} \psi''. \quad [X]$$

In Beziehung auf den Punkt M''' erhält man das Moment der Kräfte

$$= (e-b-x''')Q'' - \tfrac{1}{2}(e-b-x''')^2 G, \text{ also}$$
$$\frac{E^2 \partial^2 y'''}{\partial x'''^2} = \tfrac{1}{2}(e-b-x''')^2 G - (e-b-x''') Q''.$$

Dies integrirt, giebt

$$\frac{E^2 \partial y'''}{\partial x'''} = \tfrac{1}{2} x''' [(e-b)^2 - (e-b) x''' + \tfrac{1}{3} x'''^2] G - (e-b) x''' Q'' + \tfrac{1}{2} x'''^2 Q^2$$
$$+ \text{Const.}$$

Für $x''' = o$ wird $\frac{\partial y'''}{\partial x'''} = \operatorname{tgt} \psi'$, also

Const. $= E^2 \operatorname{tgt} \psi'$. Diesen Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt und nochmals integrirt, so ist

$$E^2 y''' = x'''^2 [\tfrac{1}{4}(e-b)^2 - \tfrac{1}{6}(e-b) x''' + \tfrac{1}{24} x'''^2] - (e-b) \tfrac{1}{2} x'''^2 Q'' + \tfrac{1}{6} x'''^3 Q''$$
$$+ x''' E^2 \operatorname{tgt} \psi' + \text{Const.}$$

Für $x''' = o$ wird $y''' = w$, daher

$$E^2 y''' = x'''^2 [\tfrac{1}{4}(e-b)^2 - \tfrac{1}{6}(e-b) x''' + \tfrac{1}{24} x'''^2] - \tfrac{1}{2}(e-b) x'''^2 Q'' + \tfrac{1}{6} x'''^3 Q''$$
$$+ x''' E^2 \operatorname{tgt} \psi' + E^2 w. \quad [XI]$$

Für $x''' = e - b$ wird $y''' = o$, also

$$o = \tfrac{1}{8}(e-b)^4 G - \tfrac{1}{3}(e-b)^3 Q'' + (e-b) E^2 \operatorname{tgt} \psi' + E^2 w. \quad [XII]$$

Aus [VI] erhält man, wenn statt $E^2 u$ aus [IV] sein Werth gesetzt und abgekürzt wird,

$$- c E^2 \operatorname{tgt} \psi = \tfrac{1}{6}(c-a)^3 P + \tfrac{1}{6} c (\tfrac{1}{4} c^3 - a^3) G + \tfrac{1}{2} c (a^2 - \tfrac{1}{3} c^2) Q$$
$$[XIII].$$

Wird in die Gleichung [XII] der Werth von $E^2 w$ aus [IX] gesetzt, so erhält man daraus $(e-b) E^2 \operatorname{tgt} \psi'$, und wenn die Gleichung [X] mit $(e-b)$ multiplizirt wird, so giebt dies gleichfalls einen Ausdruck für $(e-b) E^2 \operatorname{tgt} \psi'$; alsdann die gefundenen Werthe einander gleich gesetzt, so erhält man, wenn die Glieder, welche sich aufheben, weggelassen, und der ganze Ausdruck mit 6 c multiplizirt wird,

$$6c(e-c)E^2 \operatorname{tgt} \psi'' = c(b+2c-3e)(b-c)^2 P' - \tfrac{3}{4} c (e-c)^4 G \\ + 2c(e-c)^3 Q''.$$

Aus [VII] erhält man durch die Multiplikation mit c den Werth von $c E^2 \operatorname{tgt} \psi$, und wenn statt $c E^2 \operatorname{tgt} \psi$ der Werth aus [XIII] gesetzt wird, und sämmtliche Glieder nach gehöriger Abkürzung den Faktor $6(e-c)$ erhalten, so ist

$$6c(e-c)E^2 \operatorname{tgt} \psi'' = (a+2c)(e-c)(c-a)^2 P + \tfrac{3}{4}(e-c)c^4 G - 2c^3(e-c)Q.$$

Die beiden letzten Gleichungen von einander abgezogen, giebt

$$(a+2c)(e-c)(c-a)^2 P + c(3e-2c-b)(b-c)^2 P' + \tfrac{3}{4} ce(e-c)(e^2-3ce+3c^2) G \\ = 2c^3(e-c) Q + 2c(e-c)^3 Q''.$$

Verbindet man diesen Ausdruck mit den Gleichungen [I] und [II], so hat man drei Gleichungen und drei unbekannte Größen Q, Q', Q''. Man kann daher ganz allgemein den Druck auf die Unterlagen A, B, C bestimmen, wenn außer der eigenen Last des Balkens zugleich auf die daran hängenden Gewichte P, P' Rücksicht genommen wird. Setzt man

$$c - a = A;\ b - c = B \text{ und } e - c = C,$$

so erhält man nach der erforderlichen Entwickelung die Vertikalpressungen

$$Q = \frac{AC(2ce - ac - a^2)P + cB(e-b)(b+c-2e)P' + \frac{1}{4}ceC(c^2+3ce-e^2)G}{2c^2e(e-c)}$$

$$Q' = \frac{aC(2ce - a^2 - c^2)P + c(e-b)(2be - b^2 - c^2)P' + \frac{1}{4}ceC(e^2+ce-c^2)G}{2c^2(e-c)^2}$$

$$Q'' = \frac{cB(3be - bc - ce - b^2)P' - aAC(c+a)P + \frac{1}{4}ceC(3e^2-5ce+c^2)G}{2ce(e-c)^2}.$$

Woraus folgt, daß der lothrechte Druck auf die einzelnen Unterstützungen unabhängig von der Elasticität oder Biegsamkeit des Balkens ist, oder daß dieser **Druck unverändert bleibt, die Elasticität des Balkens mag groß oder klein seyn.** Auch läßt sich hieraus die leichte Anwendung der gefundenen Ausdrücke zur Bestimmung des Drucks auf die Unterlagen eines Balkens übersehen, weil dazu nichts weiter erfordert wird, als daß das Gewicht und die Länge des Balkens nebst den Belastungen und ihren Entfernungen von den Unterlagen bekannt sind, da die mehr oder mindere Biegsamkeit des Balkens auf die Bestimmung des Drucks keinen Einfluß hat, auch selbst dann nicht, wenn die Biegsamkeit noch so gering angenommen wird.

§. 124.

1. **Zusatz.** Wird das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt, und nur auf die Belastung durch die Gewichte P, P' Rücksicht genommen, so ist

$$Q = \frac{(c-a)(e-c)(2ce - ac - a^2)P + c(b-c)(e-b)(b+c-2e)P'}{2c^2e(e-c)}$$

$$Q' = \frac{a(e-c)(2ce - a^2 - c^2)P + c(e-b)(2be - b^2 - c^2)P'}{2c^2(e-c)^2}$$

$$Q'' = \frac{c(b-c)(3be - bc - ce - b^2)P' - a(a+c)(c-a)(e-c)P}{2ce(e-c)^2},$$

und wenn der Balken nur durch sein eigenes Gewicht belastet wird, so erhält man

$$Q = \frac{c^2 + 3ce - e^2}{8c} G$$

$$Q' = \frac{e(e^2 + ce - c^2)}{8c(e - c)} G$$

$$Q'' = \frac{3e^2 - 5ce + c^2}{8(e - c)} G.$$

§. 125.

2. Zusatz. In denjenigen Fällen, wo die mittlere Stütze bei B, Figur 45., von den beiden übrigen gleich weit absteht, also $AB = BC$ oder $e = 2c$ ist, erhält man

Taf. V. Fig. 45.

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2 - ac - a^2)P - (b-c)(2c-b)(3c-b)P' + \frac{3}{2}c^4 G}{4c^3}$$

$$Q' = \frac{a(3c^2 - a^2)P + (2c-b)(4bc - b^2 - c^2)P' + \frac{5}{2}c^4 G}{2c^3}$$

$$Q'' = \frac{(b-c)(5bc - 2c^2 - b^2)P' - a(a+c)(c-a)P + \frac{3}{2}c^4 G}{4c^3}.$$

Sind die Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht, und die Stützen gleich weit von einander entfernt, also $AD = DB = BF = FC$, oder $c = 2a$, $b = 3a$, $e = 4a$, so erhält man

$$Q = \frac{13P - 3P' + 6eG}{32}$$

$$Q' = \frac{11P + 11P' + 10eG}{16}$$

$$Q'' = \frac{13P' - 3P + 6eG}{32}.$$

Wäre die Last P so groß, wie das doppelte Gewicht des Balkens mit dem $4\frac{1}{3}$fachen der Last P' zusammen genommen, so wird die dritte Stütze oder der Punkt C gar keinen Druck leiden, weil alsdann $Q'' = 0$ ist. Und wenn $P > 4\frac{1}{3}P' + 2eG$ ist, so wird der Druck auf C negativ, oder es wird noch eine Kraft erfordert, das Ende des Balkens bis zur Horizontale A C herunter zu biegen.

Werden die Belastungen in der Mitte von den gleich weit entfernten Stützen einander gleich gesetzt, so ist $P = P'$, daher

$$Q = \frac{5P + 3eG}{16}$$

$$Q' = \frac{11P + 5eG}{8}$$

$$Q'' = \frac{5P + 3eG}{16}.$$

Wird unter den angeführten Umständen das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt, so ist

$$Q = \tfrac{5}{16}P; \quad Q' = \tfrac{22}{16}P; \quad Q'' = \tfrac{5}{16}P;$$

oder wenn angenommen wird, daß keine Gewichte an dem Balken hängen, dagegen das Gewicht eG desselben $= 2P$ ist, so wird

$$Q = \tfrac{6}{16}P; \quad Q' = \tfrac{20}{16}P; \quad Q'' = \tfrac{6}{16}P.$$

Woraus folgt, daß die in der Mitte zwischen den gleich weit entfernten Stützen aufgehängten gleichen Gewichte die mittlere Stütze stärker, und die äußere schwächer drücken, als wenn diese Last auf dem Balken gleichförmig verbreitet wäre. Im ersten Falle ist der Druck auf die mittlere Stütze $4\frac{2}{5}$ mal so groß, als auf jede der äußern; dagegen ist der Druck auf jene nur $3\frac{1}{3}$ mal so groß, als auf jede der letztern, wenn die Last auf dem Balken, wie Getreide auf Magazinböden, gleichförmig verbreitet ist.

§. 126.

3. Zusatz. Wenn bei drei gleich weit von einander angebrachten Unterstützungen nur eine Last P zwischen den beiden ersten Stützen wirkt, und auf das Gewicht des

$$Q = \frac{c^2 + 3ce - e^2}{8c} G,$$

$$Q' = \frac{e(e^2 + ce - c^2)}{8c(e - c)} G$$

$$Q'' = \frac{3e^2 - 5ce + c^2}{8(e - c)} G.$$

§. 125.

Taf. V. Fig. 45. 2. Zusatz. In denjenigen Fällen, wo die mittlere Stütze bei B, Figur 45., von den beiden übrigen gleich weit absteht, also AB = BC oder $e = 2c$ ist, erhält man

$$Q = \frac{(c-a)(4c^2 - ac - a^2)P - (b-c)(2c-b)(3c-b)P' + \frac{3}{2}c^4 G}{4c^3}$$

$$Q' = \frac{a(3c^2 - a^2)P + (2c-b)(4bc - b^2 - c^2)P' + \frac{5}{2}c^4 G}{2c^3}$$

$$Q'' = \frac{(b-c)(5bc - 2c^2 - b^2)P' - a(a+c)(c-a)P + \frac{3}{2}c^4 G}{4c^3}.$$

Sind die Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht, und die Stützen gleich weit von einander entfernt, also AD = DB = BF = FC, oder $c = 2a$, $b = 3a$, $e = 4a$, so erhält man

$$Q = \frac{13P - 3P' + 6eG}{32}$$

$$Q' = \frac{11P + 11P' + 10eG}{16}$$

$$Q'' = \frac{13P' - 3P + 6eG}{32}.$$

Wäre die Last P so groß, wie das doppelte Gewicht des Balkens mit dem $4\frac{1}{3}$fachen der Last P′ zusammen genommen, so wird die dritte Stütze oder der Punkt C gar keinen Druck leiden, weil alsdann $Q'' = 0$ ist. Und wenn $P > 4\frac{1}{3}P' + 2eG$ ist, so wird der Druck auf C negativ, oder es wird noch eine Kraft erfordert, das Ende des Balkens bis zur Horizontale AC herunter zu biegen.

Werden die Belastungen in der Mitte von den gleich weit entfernten Stützen einander gleich gesetzt, so ist $P = P'$, daher

$$Q = \frac{5P + 3eG}{16}$$

$$Q' = \frac{11P + 5eG}{8}$$

$$Q'' = \frac{5P + 3eG}{16}.$$

Wird unter den angeführten Umständen das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt, so ist

$$Q = \tfrac{5}{16}P; \quad Q' = \tfrac{22}{16}P; \quad Q'' = \tfrac{5}{16}P;$$

oder wenn angenommen wird, daß keine Gewichte an dem Balken hängen, dagegen das Gewicht eG desselben $= 2P$ ist, so wird

$$Q = \tfrac{6}{16}P; \quad Q' = \tfrac{20}{16}P; \quad Q'' = \tfrac{6}{16}P.$$

Woraus folgt, daß die in der Mitte zwischen den gleich weit entfernten Stützen aufgehängten gleichen Gewichte die mittlere Stütze stärker, und die äußere schwächer drücken, als wenn diese Last auf dem Balken gleichförmig verbreitet wäre. Im ersten Falle ist der Druck auf die mittlere Stütze $4\frac{2}{5}$ mal so groß, als auf jede der äußern; dagegen ist der Druck auf jene nur $3\frac{1}{3}$ mal so groß, als auf jede der letztern, wenn die Last auf dem Balken, wie Getreide auf Magazinböden, gleichförmig verbreitet ist.

§. 126.

3. Zusatz. Wenn bei drei gleich weit von einander angebrachten Unterstützungen nur eine Last P zwischen den beiden ersten Stützen wirkt, und auf das Gewicht des

parallel, also $= 0$ ist, so erhält man $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ für $x = b - c$, daher

$$0 = 4(3b^2c - 3c^3 - 6abc + 6ac^2)P + (4b^3c - 4c^4)G$$
$$- (12b^2c - 12c^3)Q - 12c(b-c)^2Q' + 24cE^2 \operatorname{tgt} \psi''.$$

Setzt man in diese Gleichung aus [I] den Werth von $24cE^2 \operatorname{tgt} \psi''$, so findet man

$$12(b^2c - 2bc^2 + c^3)Q' =$$
$$4(a^3 + 3b^2c - c^3 - 6abc + 3ac^2)P + (4b^3c - c^4)G - 4(3b^2c - c^3)Q.$$

Aus den Bedingungen für das Gleichgewicht folgt

$$Q' = P + \tfrac{1}{2}P' + bG - Q,$$

daher erhält man, wenn dieser Ausdruck mit $12(b^2c - 2bc^2 + c^3)$ multiplizirt, von dem vorhergehenden abgezogen und daraus Q entwickelt wird, den Vertikaldruck auf A oder D,

$$Q = \frac{4(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 6c(b-c)^2P' + c(24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3)G}{8c^2(3b - 2c)}.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus der vorstehenden Gleichung den Vertikaldruck auf B oder C,

$$Q' = \frac{4a(6bc - a^2 - 3c^2)P + 2c(3b^2 - c^2)P' + c(8b^3 + c^3 - 4bc^2)G}{8c^2(3b - 2c)}.$$

§. 128.

1. Zusatz. Wird das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt, so erhält man

$$Q = \frac{2(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 3c(b-c)^2P'}{4c^2(3b - 2c)}$$
$$Q' = \frac{2a(6bc - a^2 - 3c^2)P + c(3b^2 - c^2)P'}{4c^2(3b - 2c)},$$

und wenn der Balken nur durch sein eigenes Gewicht belastet wird, so ist

$$Q = \frac{24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3}{8c(3b - 2c)} G$$
$$Q' = \frac{8b^3 + c^3 - 4bc^2}{8c(3b - 2c)} G.$$

§. 129.

2. Zusatz. Sind sämmtliche Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht, so wird $c = 2a$, also

$$Q = \frac{a(12b - 19a)P - 3(b-2a)^2 P' + 4(6ab^2 - b^3 - 6a^2b - a^3)G}{8a(3b - 4a)}$$

$$Q' = \frac{a(12b - 13a)P + (3b^2 - 4a^2)P' + 4(a^3 - 2a^2b + b^3)G}{8a(3b - 4a)},$$

und wenn noch außerdem die Stützen gleich weit von einander abstehen, so wird $b = 3a$, daher

$$Q = \frac{17P - 3P' + 32aG}{40}.$$

$$Q' = \frac{23P + 23P' + 88aG}{40}.$$

§. 130.

Die vorhergehenden Sätze über die Biegung der elastischen Ruthen oder Balken sind unter der Voraussetzung entwickelt, daß die Biegung nur wenig von der graden Linie abweiche. Allein sie finden auch dann noch ihre Anwendung wenn die größte Ordinate nicht mehr als den zehnten Theil von der zugehörigen Abscisse beträgt, wie solches §. 141. bei der allgemeinen Untersuchung über die Krümmung elastischer Ruthen erwiesen wird.

Weil die Sätze von dem Druck elastischer Ruthen oder Balken auf ihre Unterstützungen auch dann noch gelten, wenn der Körper den kleinst möglichen Grad von Biegsamkeit und Elasticität besitzt, und weil man feste unbiegsame Körper so ansehn kann, als wenn solche nur unendlich wenig biegsam und elastisch wären, so folgt hieraus, daß die erwiesenen Sätze von der Vertheilung des Drucks eines Balkens auf seine Unterstützungen auch noch

gelten müssen, wenn der Balken als ein fester unbiegsamer Körper angesehen wird.

§. 131.

Taf. V. Fig. 47. Aufgabe. Eine gleichförmig elastische Ruthe AMB, Figur 47., sei bei B in dem horizontalen Boden BC so befestigt, daß sie in ihrem natürlichen Zustande in die grade Linie BT′ fällt, und am andern Ende der Ruthe in A hänge ein Gewicht Q, dessen Richtung die Horizontale BC in C schneidet; man soll die Gestalt der Ruthe bestimmen, vorausgesetzt, daß solche nur sehr wenig gebogen werde und nicht schwer sei.

Auflösung. Man nehme den Anfangspunkt der Abscissen im Aufhängepunkt A, ziehe für irgend einen Punkt M in der Kurve, MP auf AC senkrecht, und setze
b AP = x, PM = y, BC = b. Ferner sollen MT, BT′, AT″ die Tangenten der Punkte M, B, A darstellen,
φ α und man setze die Winkel MTC = φ, T′BC = α,
β AT″C = β. Bezeichnet nun r den Krümmungshalbmesser für den Punkt M, so wird §. 112.

$$rM = E^2 \text{ oder } \frac{E^2}{M} = r. \text{ Es ist aber auch}$$

$$r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y} \text{ folglich}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{E^2 \partial^2 y.}{\partial x^2} = -M.$$

Nun ist das Moment M = yQ; daher, wenn man diesen Werth in die vorstehende Gleichung setzt, mit ∂y multiplizirt und integrirt, so erhält man, weil ∂x constant ist,

$$\frac{E^2}{\partial x^2}\int \partial y\, \partial^2 y = -Q \int y\, \partial y, \text{ oder}$$

$$\frac{E^2 \partial y^2}{2 \partial x^2} = \frac{-Q y^2}{2} + \text{Const.}$$

Aber $\partial y = \partial x \cot \varphi$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = \cot \varphi$, also

$$\frac{E^2 \operatorname{Cot} \varphi^2}{2} = \frac{-Q y^2}{2} + \text{Const.}$$

Für $y = b$ wird $\varphi = \alpha$, also $\frac{1}{2} E^2 \cot \alpha^2 + \frac{1}{2} b^2 Q = \text{Const}$ daher

$$\frac{E^2 \partial y^2}{\partial x^2} = (b^2 - y^2) Q + E^2 \cot \alpha^2 = E^2 \cot \varphi^2 \text{ [I]},$$

und hieraus

$$\partial x^2 = \frac{E^2 \partial y^2}{E^2 \cot \alpha^2 + b^2 Q - Q y^2},$$ oder, wenn man $E^2 \cot \alpha^2 + b^2 Q = A^2$ setzt,

$$\partial x = \frac{E \partial y}{\sqrt{(A^2 - Q y^2)}},$$ und wenn man integrirt (P. A. S. 134.)

(II) $x = \frac{E}{\sqrt{Q}} \text{Arc sin} \frac{y \sqrt{Q}}{A}$, oder $\frac{x \sqrt{Q}}{E} = \text{Arc sin} \frac{y \sqrt{Q}}{A}$

wo keine Constante hinzukommt, weil x mit y zugleich verschwindet.

Wäre $\psi = \text{Arc sin } z$, so ist bekanntlich $z = \sin \psi$. Daher erhält man auch

(III) $\frac{y \sqrt{Q}}{A} = \sin \frac{x \sqrt{Q}}{E}$, oder $y = \frac{A}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x \sqrt{Q}}{E}$.

Aus der Gleichung [I] erhält man ferner

(IV) $\cot \varphi^2 = \frac{b^2 - y^2}{E^2} Q + \cot \alpha^2$,

und weil für $y = 0$ der Winkel $\varphi = \beta$ wird, so ist

(V) $\cot \beta^2 = \frac{b^2 Q}{E^2} + \cot \alpha^2$.

§. 132.

Setzt man voraus, daß die verlängerte Richtung der Kraft Q in den Punkt B fällt, wo die Ruthe be-

gelten müssen, wenn der Balken als ein fester unbiegsamer Körper angesehen wird.

§. 131.

Taf. V. Fig. 47. **Aufgabe.** Eine gleichförmig elastische Ruthe AMB, Figur 47., sei bei B in dem horizontalen Boden BC so befestigt, daß sie in ihrem natürlichen Zustande in die grade Linie BT′ fällt, und am andern Ende der Ruthe in A hänge ein Gewicht Q, dessen Richtung die Horizontale BC in C schneidet; man soll die Gestalt der Ruthe bestimmen, vorausgesetzt, daß solche nur sehr wenig gebogen werde und nicht schwer sei.

Auflösung. Man nehme den Anfangspunkt der Abscissen im Aufhängepunkt A, ziehe für irgend einen Punkt M in der Kurve, MP auf AC senkrecht, und setze
b AP = x, PM = y, BC = b. Ferner sollen MT, BT′, AT″ die Tangenten der Punkte M, B, A darstellen,
φ α und man setze die Winkel MTC = φ, T′BC = α,
β AT″C = β. Bezeichnet nun r den Krümmungshalbmesser für den Punkt M, so wird §. 112.

$$r M = E^2 \text{ oder } \frac{E^2}{M} = r. \quad \text{Es ist aber auch}$$

$$r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y} \quad \text{folglich}$$

$$(I) \quad \frac{E^2 \partial^2 y.}{\partial x^2} = - M.$$

Nun ist das Moment M = y Q; daher, wenn man diesen Werth in die vorstehende Gleichung setzt, mit ∂y multiplizirt und integrirt, so erhält man, weil ∂x constant ist,

$$\frac{E^2}{\partial x^2} \int \partial y \, \partial^2 y = - Q \int y \, \partial y, \quad \text{oder}$$

$n = 2$; der Abstand $AS' = \frac{2\pi E}{\sqrt{Q}} = 2 . AS$

$n = 3$; „ „ $AS'' = \frac{3\pi E}{\sqrt{Q}} = 3 . AS$ u. s. w.

Setzt man die ganze Länge $AB = a = n . AS$, so wird $a = \frac{n\pi E}{\sqrt{Q}}$, wo n die Anzahl der Biegungen bezeichnet. Macht die Kurve nur eine Biegung, wie Figur 49., so wird $n = 1$, und man erhält AB oder $a = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$, und hieraus Taf. V. Fig. 49.

$$\text{(VI)} \quad Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}.$$

Es sei FG, Figur 49., die größte Ordinate $= u$, und die zugehörige Absciße $AF = a'$, so muß im Scheitel G die Tangente GD mit der Axe AB parallel seyn, daher ist der Winkel $FGD = \varphi = 90$ Grad, also $\cot\varphi = \cot 90° = 0$. Wird nun in (IV), u statt y gesetzt, so erhält man $0 = \cot\alpha^2 - \frac{u^2 Q}{E^2}$, folglich die größte Ordinate

$$\text{(VII)} \quad u = \frac{E \cot\alpha}{\sqrt{Q}}.$$

Setzt man in die Gleichung (III) a' statt x und u statt y, so wird

$$u = \frac{E \cot\alpha}{\sqrt{Q}} \sin\frac{a'\sqrt{Q}}{E} = u \sin\frac{a'\sqrt{Q}}{E} \text{ oder } 1 = \sin\frac{a'\sqrt{Q}}{E}.$$

Aber $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, daher $\sin\frac{a'\sqrt{Q}}{E} = \sin\frac{1}{2}\pi$, also $\frac{a'\sqrt{Q}}{E} = \frac{1}{2}\pi$ oder $a' = \frac{1}{2}\frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$. Es ist folglich (VI) $a' = \frac{1}{2}a$ oder $AF = \frac{1}{2}AB$, daher fällt die größte Ordinate in die Mitte F der Axe AB. Auch sind alle Ordinaten wie $PM = y$ und $P'M' = y'$ einander gleich, wenn $FP = FP'$ oder $AP = BP'$ angenommen wird. Denn für $AP = x$ erhält man (III)

$$MP = y = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x \sqrt{Q}}{E},$$

und weil $AP' = a - x = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}} - x$ ist,

$$M'P' = y' = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \left(\pi - \frac{x \sqrt{Q}}{E}\right).$$

Nun ist $\sin \frac{x \sqrt{Q}}{E} = \sin \left(\pi - \frac{x \sqrt{Q}}{E}\right)$, folglich $y = y'$.

Die beiden Schenkel G A und G B sind daher einander gleich und ähnlich, oder A G B ist gegen die Linie G F eine symmetrische Kurve.

Weil $r = \frac{E^2}{y Q}$ und $\frac{a^2}{\pi^2} = \frac{E^2}{Q}$ ist, so erhält man auch für den Krümmungshalbmesser

$$\text{(VIII)} \quad r = \frac{a^2}{\pi^2 y}.$$

Für $y = 0$ wird $r = \infty$, d. h. am Aufhängepunkte A und am Ende bei B geht die Krümmung der Ruthe in eine grade Linie über. Für den Scheitel G ist $y = u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}}$, daher findet man den Krümmungshalbmesser im Scheitel G

$$= \frac{a^2 \sqrt{Q}}{\pi^2 E \cot \alpha}.$$

Endlich erhält man aus (VI) und (VII)

$$\frac{\sqrt{Q}}{E} = \frac{\pi}{a} \text{ und } \cot \alpha = u \frac{\sqrt{Q}}{E}, \text{ daher}$$

$$\text{(IX)} \quad \cot \alpha = \frac{\pi u}{a}, \text{ oder auch}$$

$$\text{(X)} \quad u = \frac{a}{\pi} \cot \alpha.$$

§. 133.

Zusatz. Denkt man sich die Linie A M B, Figur 49., umgekehrt, so daß A auf den Boden gestellt, und in B das Gewicht Q aufgehängt wird, so bleibt noch die Ge-

stalt der Kurve ungeändert, woraus folgt, daß zur Erhaltung des Gleichgewichts im Punkte B, Figur 49., nach der Richtung BA eine Kraft Q erforderlich ist. Nimmt man daher das Gewicht Q ganz weg und verbindet die Punkte A und B mittelst eines festen Fadens AB, so muß die Ruthe AMB in allen Lagen im Gleichgewichte seyn, und der Faden AB wird alsdann mit einer Kraft

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2} \text{ (VI) angespannt.}$$

Nun ist bei einerlei Ruthe die größte Ordinate $u = \frac{a}{\pi} \cot \alpha$ lediglich von dem Winkel α abhängig, und die zur Erzeugung der größten Ordinate u erforderliche Kraft $Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$ ist eine beständige Größe, welche für verschiedene Werthe von u unverändert bleibt; daher wird bei verschiedenen Krümmungen der Ruthe einerlei Kraft erfordert diese Krümmungen zu erzeugen. Auch ist

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$$

die kleinste Kraft, welche die elastische Ruthe von der Länge a zu biegen im Stande ist. Wäre Q kleiner als $\frac{\pi^2 E^2}{a^2}$, so kann sich die Ruthe nicht biegen. Es verhält sich daher bei einerlei E^2, die Last Q, welche eine elastische prismatische Ruthe oder Säule zu biegen im Stande ist, umgekehrt wie das Quadrat von der Länge der Säule.

II. Allgemeinere Untersuchung.

§. 134.

Aufgabe. An einer elastischen Ruthe AMB, Figur 50., welche in der Wand B'B'' bei B so befestigt ist, daß sie im natürlichen Zustande in die grade Linie BT' fällt, ist am Ende A ein Gewicht Q aufgehängt; man soll die Gleichung für die krumme Linie AMB finden, nach welcher die Ruthe gebogen wird.

Taf. V. Fig. 50.

Auflösung. Zur Bestimmung der Koordinaten nehme man in der krummen Linie AMB irgend einen Punkt M an, ziehe durch den Aufhängepunkt A die Linie AC senkrecht auf die Richtung AQ der Kraft Q, und ziehe BC und MP senkrecht auf AC. Ferner setze man

a x y v r $AC = a$, $AP = x$, $PM = y$, den Bogen $AM = v$, den Krümmungshalbmesser für den Punkt $M = r$, und wenn MT die zum Punkte M gehörige Tangente ist, so setze man den Winkel, welchen die Tangente mit der verlängerten Axe AC bildet, oder $ATM = \psi$. Auch sei

ψ T'BT'' die Tangente im Punkte B, tAt' im Punkte A,

α β und der Winkel $BT''C = \alpha$, $tAT = \beta$. Nun ist (§. 112.) $r = \frac{E^2}{xQ}$. Aber nach bekannten Lehren ist auch $r = \frac{-\partial v^2}{\partial x \partial^2 y}$, wenn ∂x constant angenommen wird; man erhält daher aus der Verbindung beider Gleichungen den Krümmungshalbmesser

$$\text{(I)}\quad r = \frac{E^2}{xQ} = \frac{-\partial v^3}{\partial x\, \partial^2 y}.$$

Hieraus

Hieraus wird

$$xQ = \frac{-E^2 \partial x \partial^2 y}{\partial v^3} = \frac{-E^2 \partial x \partial^2 y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)^3}},$$ oder mit $2\partial x$ multiplizirt und $\partial y = p\partial x$ gesetzt, giebt, weil ∂x constant ist, $\partial^2 y = \partial p \partial x$ und $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2(1+p^2)$, daher

$$2Qx\partial x = \frac{-2E^2 \partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}.$$

Setzt man nun zur Erleichterung der Integration $\frac{1}{p^2} + 1 = z^2$, so wird $\partial p = - p^3 z \partial z$ und $(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = p^3 z^3$, daher

$$\int \frac{\partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}},$$ also

$$\int 2Qx\partial x = x^2 Q + \text{Const} = \frac{-2E^2 \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{-2E^2 \partial y}{\partial v}.$$

Nun ist $\partial y = \partial v \sin \psi$, also $\frac{\partial y}{\partial v} = \sin \psi$, daher

$$x^2 Q + \text{Const} = - 2E^2 \sin \psi.$$

Für $x = a$ wird $\psi = \alpha$, also $\text{Const} = -a^2 Q - 2E^2 \sin \alpha$, folglich

$$x^2 Q - a^2 Q 2 - E^2 \sin \alpha = -2E^2 \sin \psi = \frac{-2E^2 \partial y}{\partial v} = \frac{-2E^2 \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

Hieraus findet man

$$\text{(II)} \quad \sin \psi = \frac{(a^2 - x^2)Q}{2E^2} + \sin \alpha;$$

ferner $(a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 2E^2 \partial y$, oder, wenn man diesen Ausdruck quadrirt, daraus ∂y^2 entwickelt, und die Quadratwurzel auszieht:

$$\text{(III)} \quad \partial y = \frac{(a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)\partial x}{\sqrt{[4E^4 - (a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)^2]}}.$$

Setzt man $\frac{a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha}{Q} = A^2$ und $\frac{4E^4}{Q^2} = B^4$, so wird

$$\text{(IV)} \quad \partial y = \frac{(A^2 - x^2)\partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}},$$

II. Allgemeinere Untersuchung.

§. 134.

Aufgabe. An einer elastischen Ruthe AMB, Figur 50., welche in der Wand $B'B''$ bei B so befestigt ist, daß sie im natürlichen Zustande in die grade Linie BT' fällt, ist am Ende A ein Gewicht Q aufgehängt; man soll die Gleichung für die krumme Linie AMB finden, nach welcher die Ruthe gebogen wird.

Taf. V. Fig. 50.

Auflösung. Zur Bestimmung der Koordinaten nehme man in der krummen Linie AMB irgend einen Punkt M an, ziehe durch den Aufhängepunkt A die Linie AC senkrecht auf die Richtung AQ der Kraft Q, und ziehe BC und MP senkrecht auf AC. Ferner setze man
a x AC = a, AP = x, PM = y, den Bogen AM = v,
y v den Krümmungshalbmesser für den Punkt M = r, und
r wenn MT die zum Punkte M gehörige Tangente ist, so setze man den Winkel, welchen die Tangente mit der ver-
ψ längerten Axe AC bildet, oder ATM = ψ. Auch sei $T'BT''$ die Tangente im Punkte B, tAt' im Punkte A,
α β und der Winkel $BT''C = \alpha$, $tAT = \beta$. Nun ist (§. 112.) $r = \frac{E^2}{xQ}$. Aber nach bekannten Lehren ist auch $r = \frac{-\partial v^2}{\partial x \partial^2 y}$, wenn ∂x constant angenommen wird; man erhält daher aus der Verbindung beider Gleichungen den Krümmungshalbmesser

$$\text{(I)} \quad r = \frac{E^2}{xQ} = \frac{-\partial v^3}{\partial x \partial^2 y}.$$

Hieraus

Hieraus wird

$xQ = \frac{-E^2 \partial x \partial^2 y}{\partial v^3} = \frac{-E^2 \partial x \partial^2 y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)^3}}$, oder mit $2\partial x$ multiplizirt und $\partial y = p \partial x$ gesetzt, giebt, weil ∂x constant ist, $\partial^2 y = \partial p \partial x$ und $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 (1+p^2)$, daher

$$2 Q x \partial x = \frac{-2E^2 \partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}.$$

Setzt man nun zur Erleichterung der Integration $\frac{1}{p^2} + 1 = z^2$, so wird $\partial p = - p^3 z \partial z$ und $(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = p^3 z^3$, daher

$\int \frac{\partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$, also

$\int 2 Q x \partial x = x^2 Q + \text{Const} = \frac{-2E^2 \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{-2E^2 \partial y}{\partial v}.$

Nun ist $\partial y = \partial v \sin \psi$, also $\frac{\partial y}{\partial v} = \sin \psi$, daher

$x^2 Q + \text{Const} = - 2E^2 \sin \psi.$

Für $x = a$ wird $\psi = \alpha$, also $\text{Const} = -a^2 Q - 2E^2 \sin \alpha$, folglich

$x^2 Q - a^2 Q 2 - E^2 \sin \alpha = -2E^2 \sin \psi = \frac{-2E^2 \partial y}{\partial v} = \frac{-2E^2 \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$

Hieraus findet man

$$\text{(II)} \ \sin \psi = \frac{(a^2 - x^2) Q}{2E^2} + \sin \alpha;$$

ferner $(a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q) \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 2E^2 \partial y$, oder, wenn man diesen Ausdruck quadrirt, daraus ∂y^2 entwickelt, und die Quadratwurzel auszieht:

$$\text{(III)} \ \partial y = \frac{(a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q) \partial x}{\sqrt{[4E^4 - (a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)^2]}}.$$

Setzt man $\frac{a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha}{Q} = A^2$ und $\frac{4E^4}{Q^2} = B^4$, so wird

$$\text{(IV)} \ \partial y = \frac{(A^2 - x^2) \partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}},$$

parallel, also = o ist, so erhält man $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ für $x = b - c$, daher

$$0 = 4(3b^2c - 3c^3 - 6abc + 6ac^2)P + (4b^3c - 4c^4)G$$
$$- (12b^2c - 12c^3)Q - 12c(b-c)^2Q' + 24cE^2 \operatorname{tgt}\psi''.$$

Setzt man in diese Gleichung aus [I] den Werth von $24cE^2 \operatorname{tgt}\psi''$, so findet man

$$12(b^2c - 2bc^2 + c^3)Q' =$$
$$4(a^3 + 3b^2c - c^3 - 6abc + 3ac^2)P + (4b^3c - c^4)G - 4(3b^2c - c^3)Q.$$

Aus den Bedingungen für das Gleichgewicht folgt

$$Q' = P + \tfrac{1}{2}P' + bG - Q,$$

daher erhält man, wenn dieser Ausdruck mit $12(b^2c - 2bc^2 + c^3)$ multiplizirt, von dem vorhergehenden abgezogen und daraus Q entwickelt wird, den Vertikaldruck auf A oder D,

$$Q = \frac{4(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 6c(b-c)^2P' + c(24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3)G}{8c^2(3b - 2c)}.$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus der vorstehenden Gleichung den Vertikaldruck auf B oder C,

$$Q' = \frac{4a(6bc - a^2 - 3c^2)P + 2c(3b^2 - c^2)P' + c(8b^3 + c^3 - 4bc^2)G}{8c^2(3b - 2c)}.$$

§. 128.

1. Zusatz. Wird das Gewicht des Balkens bei Seite gesetzt, so erhält man

$$Q = \frac{2(a^3 - 6abc + 3ac^2 + 6bc^2 - 4c^3)P - 3c(b-c)^2P'}{4c^2(3b - 2c)}$$
$$Q' = \frac{2a(6bc - a^2 - 3c^2)P + c(3b^2 - c^2)P'}{4c^2(3b - 2c)},$$

und wenn der Balken nur durch sein eigenes Gewicht belastet wird, so ist

$$Q = \frac{24b^2c - 8b^3 - 12bc^2 - c^3}{8c(3b - 2c)}G$$
$$Q' = \frac{8b^3 + c^3 - 4bc^2}{8c(3b - 2c)}G.$$

§. 129.

2. Zusatz. Sind sämmtliche Gewichte in der Mitte zwischen den Stützen angebracht, so wird $c = 2a$, also

$$Q = \frac{a(12b - 19a)P - 3(b - 2a)^2 P' + 4(6ab^2 - b^3 - 6a^2b - a^3)G}{8a(3b - 4a)}$$

$$Q' = \frac{a(12b - 13a)P + (3b^2 - 4a^2)P' + 4(a^3 - 2a^2b + b^3)G}{8a(3b - 4a)},$$

und wenn noch außerdem die Stützen gleich weit von einander abstehen, so wird $b = 3a$, daher

$$Q = \frac{17P - 3P' + 32aG}{40}.$$

$$Q' = \frac{23P + 23P' + 88aG}{40}.$$

§. 130.

Die vorhergehenden Sätze über die Biegung der elastischen Ruthen oder Balken sind unter der Voraussetzung entwickelt, daß die Biegung nur wenig von der graden Linie abweiche. Allein sie finden auch dann noch ihre Anwendung wenn die größte Ordinate nicht mehr als den zehnten Theil von der zugehörigen Abscisse beträgt, wie solches §. 141. bei der allgemeinen Untersuchung über die Krümmung elastischer Ruthen erwiesen wird.

Weil die Sätze von dem Druck elastischer Ruthen oder Balken auf ihre Unterstützungen auch dann noch gelten, wenn der Körper den kleinst möglichen Grad von Biegsamkeit und Elasticität besitzt, und weil man feste unbiegsame Körper so ansehn kann, als wenn solche nur unendlich wenig biegsam und elastisch wären, so folgt hieraus, daß die erwiesenen Sätze von der Vertheilung des Drucks eines Balkens auf seine Unterstützungen auch noch

gelten müssen, wenn der Balken als ein fester unbiegsamer Körper angesehen wird.

§. 131.

Taf. V, Fig. 47. Aufgabe. Eine gleichförmig elastische Ruthe AMB, Figur 47., sei bei B in dem horizontalen Boden BC so befestigt, daß sie in ihrem natürlichen Zustande in die grade Linie BT′ fällt, und am andern Ende der Ruthe in A hänge ein Gewicht Q, dessen Richtung die Horizontale BC in C schneidet; man soll die Gestalt der Ruthe bestimmen, vorausgesetzt, daß solche nur sehr wenig gebogen werde und nicht schwer sei.

Auflösung. Man nehme den Anfangspunkt der Abscissen im Aufhängepunkt A, ziehe für irgend einen Punkt M in der Kurve, MP auf AC senkrecht, und setze
b $AP = x$, $PM = y$, $BC = b$. Ferner sollen MT, BT′, AT″ die Tangenten der Punkte M, B, A darstellen,
φ α und man setze die Winkel $MTC = \varphi$, $T'BC = \alpha$,
β $AT''C = \beta$. Bezeichnet nun r den Krümmungshalbmesser für den Punkt M, so wird §. 112.

$$rM = E^2 \text{ oder } \frac{E^2}{M} = r. \text{ Es ist aber auch}$$

$$r = \frac{-\partial x^2}{\partial^2 y} \text{ folglich}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{E^2\,\partial^2 y.}{\partial x^2} = -M.$$

Nun ist das Moment $M = yQ$; daher, wenn man diesen Werth in die vorstehende Gleichung setzt, mit ∂y multiplizirt und integrirt, so erhält man, weil ∂x constant ist,

$$\frac{E^2}{\partial x^2}\int \partial y\, \partial^2 y = -Q \int y\, \partial y, \text{ oder}$$

$$\frac{E^2 \partial y^2}{2 \partial x^2} = \frac{-Q y^2}{2} + \text{Const.}$$

Aber $\partial y = \partial x \cot \varphi$, oder $\frac{\partial y}{\partial x} = \cot \varphi$, also

$$\frac{E^2 \text{Cot}\, \varphi^2}{2} = \frac{-Q y^2}{2} + \text{Const.}$$

Für $y = b$ wird $\varphi = \alpha$, also $\frac{1}{2} E^2 \cot \alpha^2 + \frac{1}{2} b^2 Q = \text{Const}$ daher

$$\frac{E^2 \partial y^2}{\partial x^2} = (b^2 - y^2) Q + E^2 \cot \alpha^2 = E^2 \cot \varphi^2 \text{ [I]},$$

und hieraus

$$\partial x^2 = \frac{E^2 \partial y^2}{E^2 \cot \alpha^2 + b^2 Q - Q y^2},$$ oder, wenn man $E^2 \cot \alpha^2 + b^2 Q = A^2$ setzt,

$$\partial x = \frac{E \partial y}{\sqrt{(A^2 - Q y^2)}},$$ und wenn man integrirt (P. A. S. 134.)

(II) $x = \frac{E}{\sqrt{Q}} \text{Arc sin} \frac{y \sqrt{Q}}{A}$, oder $\frac{x \sqrt{Q}}{E} = \text{Arc sin} \frac{y \sqrt{Q}}{A}$

wo keine Constante hinzukommt, weil x mit y zugleich verschwindet.

Wäre $\psi = \text{Arc sin}\, z$, so ist bekanntlich $z = \sin \psi$. Daher erhält man auch

(III) $\frac{y \sqrt{Q}}{A} = \sin \frac{x \sqrt{Q}}{E}$, oder $y = \frac{A}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x \sqrt{Q}}{E}$.

Aus der Gleichung [I] erhält man ferner

(IV) $\cot \varphi^2 = \frac{b^2 - y^2}{E^2} Q + \cot \alpha^2$,

und weil für $y = 0$ der Winkel $\varphi = \beta$ wird, so ist

(V) $\cot \beta^2 = \frac{b^2 Q}{E^2} + \cot \alpha^2$.

§. 132.

Setzt man voraus, daß die verlängerte Richtung der Kraft Q in den Punkt B fällt, wo die Ruthe be-

festigt ist, so wird $b = o$, also $A = E \cot \alpha$, und man erhält für die Gestalt der Ruthe folgende Gleichungen:

$$\text{(I)} \quad r = \frac{E^2}{y\,Q}$$

$$\text{(II)} \quad x = \frac{E}{\sqrt{Q}} \text{Arc} \sin \frac{y\sqrt{Q}}{E \cot \alpha}$$

$$\text{(III)} \quad y = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E}$$

$$\text{(IV)} \quad \cot \varphi^2 = \cot \alpha^2 - \frac{y^2\,Q}{E^2}$$

$$\text{(V)} \quad \cot \beta = \cot \alpha.$$

Taf. V. Fig. 48. Hieraus folgt, daß die Tangenten der krummen Linie, welche die Ruthe bildet, am Aufhängepunkte A, Figur 48., und da, wo sie befestigt ist, bei B gleiche Winkel mit dem Horizonte einschließen.

Wird $y = o$ gesetzt, so erhält man diejenigen Punkte, in welchen die krumme Linie in die Axe AB fällt, oder solche durchschneidet. Dies giebt (III)

$$o = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E}, \text{ oder } \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E} = o.$$

Nun ist $\sin o = \sin \pi = \sin 2\pi = \sin 3\pi \ldots = o$, oder $\sin n\pi = o$, wo n jede ganze Zahl oder Null seyn kann, daher

$$\sin \frac{x\sqrt{Q}}{E} = \sin n\pi, \text{ also } \frac{x\sqrt{Q}}{E} = n\pi, \text{ und}$$

man findet für jeden Durchschnittspunkt der Axe die zugehörige Absciſſe

$$x = \frac{n\pi E}{\sqrt{Q}}.$$

Behält n die erforderliche Bedeutung, so ist für

$n = o$; der Abstand von A oder $x = o$.

$n = 1$; der Abstand $AS = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}} = AS$

$n = 2$; der Abstand $AS' = \frac{2\pi E}{\sqrt{Q}} = 2 \cdot AS$

$n = 3$; „ „ $AS'' = \frac{3\pi E}{\sqrt{Q}} = 3 \cdot AS$ u. s. w.

Setzt man die ganze Länge $AB = a = n \cdot AS$, so wird $a = \frac{n \pi E}{\sqrt{Q}}$, wo n die Anzahl der Biegungen bezeichnet. Macht die Kurve nur eine Biegung, wie Figur 49., so wird $n = 1$, und man erhält AB oder $a = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$, und hieraus Taf. V. Fig. 49.

$$\text{(VI)} \quad Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}.$$

Es sei FG, Figur 49., die größte Ordinate $= u$, und die zugehörige Abscisse $AF = a'$, so muß im Scheitel G die Tangente GD mit der Axe AB parallel seyn, daher ist der Winkel $FGD = \varphi = 90$ Grad, also $\cot \varphi = \cot 90° = 0$. Wird nun in (IV), u statt y gesetzt, so erhält man $0 = \cot \alpha^2 - \frac{u^2 Q}{E^2}$, folglich die größte Ordinate

$$\text{(VII)} \quad u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}}.$$

Setzt man in die Gleichung (III) a' statt x und u statt y, so wird

$$u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E} = u \sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E} \text{ oder } 1 = \sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E}.$$

Aber $\sin \frac{1}{2} \pi = 1$, daher $\sin \frac{a' \sqrt{Q}}{E} = \sin \frac{1}{2} \pi$, also $\frac{a' \sqrt{Q}}{E} = \frac{1}{2} \pi$ oder $a' = \frac{1}{2} \frac{\pi E}{\sqrt{Q}}$. Es ist folglich (VI) $a' = \frac{1}{2} a$ oder $AF = \frac{1}{2} AB$, daher fällt die größte Ordinate in die Mitte F der Axe AB. Auch sind alle Ordinaten wie $PM = y$ und $P'M' = y'$ einander gleich, wenn $FP = FP'$ oder $AP = BP'$ angenommen wird. Denn für $AP = x$ erhält man (III)

$$MP = y = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \frac{x\sqrt{Q}}{E},$$

und weil $AP' = a - x = \frac{\pi E}{\sqrt{Q}} - x$ ist,

$$M'P' = y' = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}} \sin \left(\pi - \frac{x\sqrt{Q}}{E}\right).$$

Nun ist $\sin \frac{x\sqrt{Q}}{E} = \sin \left(\pi - \frac{x\sqrt{Q}}{E}\right)$, folglich $y = y'$.

Die beiden Schenkel GA und GB sind daher einander gleich und ähnlich, oder AGB ist gegen die Linie GF eine symmetrische Kurve.

Weil $r = \frac{E^2}{yQ}$ und $\frac{a^2}{\pi^2} = \frac{E^2}{Q}$ ist, so erhält man auch für den Krümmungshalbmesser

$$\text{(VIII)} \quad r = \frac{a^2}{\pi^2 y}.$$

Für $y = 0$ wird $r = \infty$, d. h. am Aufhängepunkte A und am Ende bei B geht die Krümmung der Ruthe in eine grade Linie über. Für den Scheitel G ist $y = u = \frac{E \cot \alpha}{\sqrt{Q}}$, daher findet man den Krümmungshalbmesser im Scheitel G

$$= \frac{a^2 \sqrt{Q}}{\pi^2 E \cot \alpha}.$$

Endlich erhält man aus (VI) und (VII)

$$\frac{\sqrt{Q}}{E} = \frac{\pi}{a} \text{ und } \cot \alpha = u \frac{\sqrt{Q}}{E}, \text{ daher}$$

$$\text{(IX)} \quad \cot \alpha = \frac{\pi u}{a}, \text{ oder auch}$$

$$\text{(X)} \quad u = \frac{a}{\pi} \cot \alpha.$$

§. 133.

Zusatz. Denkt man sich die Linie AMB, Figur 49., umgekehrt, so daß A auf den Boden gestellt, und in B das Gewicht Q aufgehängt wird, so bleibt noch die Ge-

stalt der Kurve ungeändert, woraus folgt, daß zur Erhaltung des Gleichgewichts im Punkte B, Figur 49., nach der Richtung BA eine Kraft Q erforderlich ist. Nimmt man daher das Gewicht Q ganz weg und verbindet die Punkte A und B mittelst eines festen Fadens AB, so muß die Ruthe AMB in allen Lagen im Gleichgewichte seyn, und der Faden AB wird alsdann mit einer Kraft

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2} \text{ (VI) angespannt.}$$

Nun ist bei einerlei Ruthe die größte Ordinate $u = \frac{a}{\pi} \cot \alpha$ lediglich von dem Winkel α abhängig, und die zur Erzeugung der größten Ordinate u erforderliche Kraft $Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$ ist eine beständige Größe, welche für verschiedene Werthe von u unverändert bleibt; daher wird bei verschiedenen Krümmungen der Ruthe einerlei Kraft erfordert diese Krümmungen zu erzeugen. Auch ist

$$Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$$

die kleinste Kraft, welche die elastische Ruthe von der Länge a zu biegen im Stande ist. Wäre Q kleiner als $\frac{\pi^2 E^2}{a^2}$, so kann sich die Ruthe nicht biegen. Es verhält sich daher bei einerlei E^2, die Last Q, welche eine elastische prismatische Ruthe oder Säule zu biegen im Stande ist, umgekehrt wie das Quadrat von der Länge der Säule.

II. Allgemeinere Untersuchung.

§. 134.

Aufgabe. An einer elastischen Ruthe AMB, Figur 50., welche in der Wand B′B″ bei B so befestigt ist,
Taf. V. Fig. 50.
daß sie im natürlichen Zustande in die grade Linie BT′ fällt, ist am Ende A ein Gewicht Q aufgehängt; man soll die Gleichung für die krumme Linie AMB finden, nach welcher die Ruthe gebogen wird.

Auflösung. Zur Bestimmung der Koordinaten nehme man in der krummen Linie AMB irgend einen Punkt M an, ziehe durch den Aufhängepunkt A die Linie AC senkrecht auf die Richtung AQ der Kraft Q, und ziehe BC und MP senkrecht auf AC. Ferner setze man
a x y v r
AC = a, AP = x, PM = y, den Bogen AM = v, den Krümmungshalbmesser für den Punkt M = r, und wenn MT die zum Punkte M gehörige Tangente ist, so setze man den Winkel, welchen die Tangente mit der verlängerten Axe AC bildet, oder ATM = ψ. Auch sei
ψ
T′BT″ die Tangente im Punkte B, tAt′ im Punkte A, und der Winkel BT″C = α, tAT = β. Nun ist
α β
(§. 112.) $r = \frac{E^2}{xQ}$. Aber nach bekannten Lehren ist auch $r = \frac{-\partial v^2}{\partial x \partial^2 y}$, wenn ∂x constant angenommen wird; man erhält daher aus der Verbindung beider Gleichungen den Krümmungshalbmesser

$$(I)\ r = \frac{E^2}{xQ} = \frac{-\partial v^2}{\partial x \partial^2 y}.$$

Hieraus

Hieraus wird

$$xQ = \frac{-E^2 \partial x \partial^2 y}{\partial v^3} = \frac{-E^2 \partial x \partial^2 y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)^3}},$$ oder mit $2\partial x$ multiplizirt und $\partial y = p\partial x$ gesetzt, giebt, weil ∂x constant ist, $\partial^2 y = \partial p \partial x$ und $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial x^2 (1 + p^2)$, daher

$$2Qx\partial x = \frac{-2E^2 \partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}}.$$

Setzt man nun zur Erleichterung der Integration $\frac{1}{p^2} + 1 = z^2$, so wird $\partial p = -p^3 z \partial z$ und $(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = p^3 z^3$, daher

$$\int \frac{\partial p}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}},$$ also

$$\int 2Qx\partial x = x^2 Q + \text{Const} = \frac{-2E^2 \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{-2E^2 \partial y}{\partial v}.$$

Nun ist $\partial y = \partial v \sin \psi$, also $\frac{\partial y}{\partial v} = \sin \psi$, daher

$$x^2 Q + \text{Const} = -2E^2 \sin \psi.$$

Für $x = a$ wird $\psi = \alpha$, also $\text{Const} = -a^2 Q - 2E^2 \sin \alpha$, folglich

$$x^2 Q - a^2 Q 2 - E^2 \sin \alpha = -2E^2 \sin \psi = \frac{-2E^2 \partial y}{\partial v} = \frac{-2E^2 \partial y}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$$

Hieraus findet man

$$\text{(II)} \sin \psi = \frac{(a^2 - x^2) Q}{2E^2} + \sin \alpha;$$

ferner $(a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 2E^2 \partial y$, oder, wenn man diesen Ausdruck quadrirt, daraus ∂y^2 entwickelt, und die Quadratwurzel auszieht:

$$\text{(III)} \partial y = \frac{(a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)\partial x}{\sqrt{[4E^4 - (a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha - x^2 Q)^2]}}.$$

Setzt man $\frac{a^2 Q + 2E^2 \sin \alpha}{Q} = A^2$ und $\frac{4E^4}{Q^2} = B^4$, so wird

$$\text{(IV)} \partial y = \frac{(A^2 - x^2)\partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}},$$

welches die allgemeine Gleichung für die elastische Linie ist, wenn die Elasticität der Ruthe auf ihre ganze Länge einerlei bleibt, und wenn man das Gewicht der Ruthe selbst bei Seite setzt. Dieser Ausdruck kann aber nicht anders als mittelst Reihen integrirt werden.

Um einen Ausdruck für das Element des Bogens v zu erhalten, so ist nach (II)

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \sin \psi = \frac{a^2 Q + 2 E^2 \sin \alpha - x^2 Q}{2 E^2} = \frac{A^2 - x^2}{B^2}, \text{ also}$$

$$\partial v = \frac{B^2}{A^2 - x^2} \partial y = \frac{B^2}{A^2 - x^2} \cdot \frac{(A^2 - x^2) \partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}},$$

oder (V) $\partial v = \dfrac{B^2 \partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}}$.

§. 135.

1. Zusatz. Aus der Gleichung $r x Q = E^2$ folgt, daß für einerlei Q und x der Krümmungshalbmesser r mit E^2 wächst, daher wird die Ruthe unter übrigens gleichen Umständen desto weniger gebogen, je größer E^2 ist. Für $E^2 = \infty$ wird $r = \infty$, also bleibt in diesem Falle die Ruthe grade.

Bei einerlei E^2 und Q wird r desto kleiner, je größer x ist; daher ist die Ruthe für das größte x am meisten gebogen, und die Biegung nimmt immer mehr ab, je kleiner x ist.

Weil $r = \frac{E^2}{xQ}$ ist, so wird für $x = 0$, $r = \infty$, oder in demjenigen Punkte, wo das Gewicht Q aufgehängt ist, geht die Krümmung der Ruthe in eine grade Linie über.

§. 136.

2. Zusatz. Wollte man den Winkel $CAt' = \beta$, Figur 50., finden, welchen die Tangente At' am Auf-

hängepunkte A mit der Axe AC einschließt, so darf man nur in der Gleichung (II) β statt ψ und $x = o$ setzen, so erhält man

$$\sin\beta = \frac{a^2 Q}{2E^2} + \sin\alpha,$$

so daß einer von den Winkeln α, β gefunden werden kann, wenn der andere bekannt ist.

§. 137.

3. Zusatz. Diejenige Abscisse, welche zur größten Ordinate gehört, oder vielmehr, wo die Ordinate ein Größtes ist, muß offenbar da liegen, wo die Tangente MT, Figur 50., mit der Axe AC parallel ist, oder wo $\psi = o$ wird. Alsdann ist aber $\sin\psi = o$, daher nach (II)

$$o = \frac{a^2 - x^2}{2E^2} Q + \sin\alpha,$$

und man findet hieraus diejenige Abscisse, welche der größten Ordinate entspricht, oder

$$x = \sqrt{\frac{a^2 Q + 2E^2 \sin\alpha}{Q}}.$$

§. 138.

Aufgabe. Aus der gegebenen Abscisse x die zugehörige Ordinate y mittelst einer unendlichen Reihe zu finden.

Auflösung. Weil $B^4 - (A^2 - x^2)^2$

$$= (B^2+A^2-x^2)(B^2-A^2+x^2) = (B^2+A^2)(B^2-A^2)\left(1-\frac{x^2}{B^2+A^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{B^2-A^2}\right),$$

so erhält man, wenn $\frac{B^2 - A^2}{B^2 + A^2} = f^2$ und

$x^2 = (B^2 - A^2)\, z^2$ gesetzt wird,

$$B^4 - (A^2 - x^2)^2 = (B^2 + A^2)(B^2 - A^2)(1 + z^2)(1 - f^2 z^2).$$

M 2

Aber $A^2 - x^2 = A^2 - (B^2 - A^2) z^2$, und $\partial x = \partial z \sqrt{(B^2 - A^2)}$, daher §. 134. IV.

$$\partial y = \frac{[A^2 - (B^2 - A^2) z^2] \partial z}{\sqrt{(B^2 + A^2)} \sqrt{(1 + z^2)} \sqrt{(1 - f^2 z^2)}}.$$

Wird $\frac{1}{\sqrt{(1 - f^2 z^2)}}$ nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe aufgelöst, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - f^2 z^2)}} = 1 + \tfrac{1}{2} f z + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} f^2 z^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} f^3 z^3 + \ldots$$

und wenn man setzt:

$$\frac{A^2 - (B^2 - A^2) z^2}{\sqrt{(1 - f^2 z^2)}} = A' + B' f z + C' f^2 z^2 + D' f^3 z^3 + \ldots,$$

so findet man durch die Multiplikation der erstern Reihe mit $A^2 - (B^2 - A^2) z^2$, wenn man bemerkt, daß $B^2 - A^2 = (B^2 + A^2) f^2$ ist:

$$A' = A^2$$

$$B' = \tfrac{1}{2} A^2$$

$$C' = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A^2 - (B^2 + A^2) = -\frac{5 A^2 + 8 B^2}{8}$$

$$D' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} A^2 - \tfrac{1}{2} (B^2 + A^2) = -\frac{3 A^2 + 8 B^2}{8}$$

$$E' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} A^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} (B^2 + A^2) = -\frac{13 A^2 + 48 B^2}{128}$$

$$F' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} A^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} (B^2 + A^2) = -\frac{17 A^2 + 80 B^2}{256}$$

$$G' = -\frac{49 A^2 + 280 B^2}{1024}$$ u. s. w.

Nach P. A. S. 135. und 168. findet man

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = \operatorname{logn} [z + \sqrt{(1 + z^2)}] + \text{Const.} = R,$$

wo Const. $= 0$ ist, weil mit $z = 0$ das Integral verschwindet.

$\int \frac{z \partial z}{\sqrt{(1 + z^2)}} = \sqrt{(1 + z^2)} + \text{Const.}$ Für $z = 0$ verschwindet das Integral, also wird Const. $= -1$.

$$\int \frac{z^2 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z\sqrt{(1+z^2)}}{2} - \tfrac{1}{2}R$$

$$\int \frac{z^3 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z^2-2}{3}\sqrt{(1+z^2)} + \text{Const, wo Const} = \tfrac{2}{3} \text{ ist.}$$

$$\int \frac{z^4 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z^3\sqrt{(1+z^2)}}{4} - \frac{3z\sqrt{(1+z^2)}}{4\cdot 2} + \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}R$$

$$\int \frac{z^5 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{3z^4-4z^2+8}{15}\sqrt{(1+z^2)} + \text{Const., wo}$$

Const. $= -\frac{8}{15}$ ist.

$$\int \frac{z^6 \partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} = \frac{z^5\sqrt{(1+z^2)}}{6} - \frac{5z^3\sqrt{(1+z^2)}}{6.4} + \frac{5.3.z\sqrt{(1+z^2)}}{6.4.2} - \frac{5.3.1}{6.4.2}R$$

u. s. w. Es ist aber

$$\partial y = \frac{\partial z}{\sqrt{(B^2+A^2)}\sqrt{(1+z^2)}}[A' + B'fz + C'f^2z^2 + D'f^3z^3 + \ldots.],$$

daher

$$y = \frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2)}}\left[A'\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} + B'f\int\frac{z\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} + C'f^2\int\frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}} + \ldots.\right],$$

oder wenn man die gefundenen Integrale in diese Reihe setzt, und $\sqrt{(1+z^2)}$ durch W bezeichnet, so wird

$$y = \frac{1}{\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\begin{array}{l} R\;\{A' - \frac{1}{2}C'f^2 + \frac{3}{8}E'f^4 - \frac{5}{16}G'f^6 + \frac{35}{128}I'f^8 - \ldots\} \\ (W-1)\{B'f - \frac{2}{3}D'f^3 + \frac{8}{15}F'f^5 - \frac{16}{35}H'f^7 + \;\ldots\ldots\} \\ W\left\{\begin{array}{l} fz\,\{\frac{1}{2}C'f - \frac{3}{8}E'f^3 + \frac{5}{16}G'f^5 - \ldots\ldots\} \\ f^2z^2\{\frac{1}{3}D'f - \frac{4}{15}F'f^3 + \frac{8}{35}H'f^5 - \ldots\ldots\} \\ f^3z^3\{\frac{1}{4}E'f - \frac{5}{24}G'f^3 + \ldots\ldots\ldots\} \\ f^4z^4\{\frac{1}{5}F'f - \ldots\ldots\ldots\ldots\} \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

u. s. w.

Da nun $f = \sqrt{\frac{B^2-A^2}{B^2+A^2}}$ und $z = \frac{x}{\sqrt{(B^2-B^2)}}$,

also

$$fz = \frac{x}{\sqrt{(B^2+A^2)}},$$

und $\sqrt{(B^2+A^2)}$ allemal größer als x ist, so folgt hieraus, daß die für y gefundene Reihe desto mehr abnehmen

muß, je größer $\sqrt{(B^2 + A^2)}$ gegen x ist, und je mehr Glieder derselben in Rechnung gebracht werden.

Will man nur die zweite Potenz von f in Rechnung bringen, so wird

$$y = \frac{1}{\sqrt{(B^2+A^2)}}[(A' - \tfrac{1}{2}C'f^2)R + B'f(W-1) + \tfrac{1}{2}C'f^2 Wz],$$

oder

$$y = \frac{(21A^2 + B^2)R + 8A^2 f(W-1) - (5A^2 + 8B^2) f^2 Wz}{16\sqrt{(A^2+B^2)}},$$

wo $z = \frac{x}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

$W = \sqrt{(1 + z^2)} = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 + x^2}{A^2 + B^2}}$ und

$R = \text{logn}[z + \sqrt{(1 + z^2)}]$

$= \text{logn}[x + \sqrt{(A^2 + B^2 + x^2)}] - \tfrac{1}{2}\text{logn}(A^2 + B^2)$ ist.

§. 139.

1. Zusatz. Wollte man statt der für y gefundenen weitläuftigen Reihe einen kürzern Näherungsausdruck suchen, so könnte man folgendergestalt verfahren. Man verwandele die Reihe

$$1 + \tfrac{1}{2}fz + \tfrac{3}{8}f^2z^2 + \tfrac{5}{16}f^3z^3 + \tfrac{35}{128}f^4z^4 + \ldots$$

in einen Kettenbruch, so findet man als Näherungswerth

$$\frac{4 - fz}{4 - 3fz} = 1 + \tfrac{1}{2}fz + \tfrac{3}{8}f^2z^2 + \tfrac{9}{32}f^3z^3 + \ldots.$$

Wird nun $\frac{4 - fz}{4 - 3fz}$ statt $\frac{1}{\sqrt{(1 - f^2z^2)}}$ in die Differenzialgleichung des vorigen §. gesetzt, und zur Erleichterung der Integration der Werth $u = 4 - 3fz$ eingeführt, so erhält man, weil

$$z = \frac{4-u}{3f}; \quad \partial z = \frac{-\partial u}{3f}; \quad 1 + z^2 = \frac{9f^2 + 16 - 8u + u^2}{9f^2}$$

$$\text{also } \partial y = \frac{-[A^2 - (B^2 - A^2)\frac{(4-u)^2}{9f^2}](8+u)\,\partial u}{3u\sqrt{(B^2+A^2)}\sqrt{(9f^2+16-8u+u^2)}} \text{ ist,}$$

und wenn man $9f^2 + 16 - 8u + u^2 = U$ setzt,

$$\partial y = \frac{\partial u}{27f^2\sqrt{(B^2+A^2)}}\left[\frac{128(B^2-A^2)-72f^2A^2}{u\sqrt{U}} - \frac{48(B^2-A^2)+9f^2A^2}{\sqrt{U}} + \frac{(B^2-A^2)u^2}{\sqrt{U}}\right]$$

Nun ist (P. A. S. 142, 140 und 157.)

$$\int\frac{\partial u}{u\sqrt{U}} = \frac{-1}{\sqrt{(9f^2+16)}}\operatorname{logn}\frac{9f^2+16-4u+\sqrt{(9f^2+16)}\sqrt{U}}{u} + \text{Const.}$$

$$\int\frac{\partial u}{\sqrt{U}} = \operatorname{logn}[u-4+\sqrt{U}] + \text{Const.}$$

$$\int\frac{u^2\partial u}{\sqrt{U}} = \frac{12+u}{2}\sqrt{U} + \frac{32-9f^2}{2}\operatorname{logn}[u-4+\sqrt{U}] + \text{Const.}$$

Hieraus erhält man nach gehöriger Zusammenziehung:

$$y = \frac{1}{27f^2\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\frac{128(B^2-A^2)-72f^2A^2}{\sqrt{(9f^2+16)}}\operatorname{logn}\frac{9f^2+16-4u+\sqrt{(9f^2+16)}\sqrt{U}}{u}\right.$$
$$\left.+\frac{(B^2-A^2)(12+u)}{2}\sqrt{U} - \frac{(9f^2+64)(B^2-A^2)+18f^2A^2}{2}\operatorname{logn}[u-4+\sqrt{U}]\right\}$$
$$+ \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $z = 0$; $u = 4$; $U = 9f^2$ und $y = 0$, daher

$$\text{Const} = \frac{1}{27f^2\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\frac{72f^2-128(B^2-A^2)}{\sqrt{(9f^2+16)}}\operatorname{logn}\frac{9f^2+3f\sqrt{(9f^2+16)}}{4}\right.$$
$$\left.-24f(B^2-A^2) + \frac{(9f^2+64)(B^2-A^2)+18f^2A^2}{2}\operatorname{logn}3f\right\}$$

folglich, wenn man $\frac{B^2-A^2}{B^2+A^2}$ statt f^2 setzt,

$$y =$$
$$\frac{1}{34}\left\{\frac{16(16B^2+7A^2)}{\sqrt{(25B^2+7A^2)}}\operatorname{logn}\frac{25B^2+7A^2-4(B^2+A^2)u+\sqrt{(B^2+A^2)}\sqrt{(25B^2+7A^2)}\sqrt{U}}{\frac{1}{4}[9(B^2-A^2)+3\sqrt{(B^2-A^2)}\sqrt{(25B^2+7A^2)}]u}\right.$$
$$+\sqrt{(B^2+A^2)}(12+u)\sqrt{U} - 48\sqrt{(B^2-A^2)}$$
$$\left.+73\sqrt{(B^2+A^2)}\operatorname{logn}\frac{3\sqrt{(B^2-A^2)}}{\sqrt{(B^2+A^2)}(u-4+\sqrt{U})}\right\}$$

wo $u = 4 - 3fz = 4 - \frac{3x}{\sqrt{(B^2+A^2)}}$ ist.

§. 140.

2. Zusatz. Will man nach den Entwickelungen des vorigen §. die Länge des Bogens $AM = v$ bestimmen, so ist nach §. 134. und 138.

$$\partial v = \frac{B^2 \partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}} = \frac{B^2 \partial z}{\sqrt{(B^2 + A^2)}\sqrt{(1+z^2)}\sqrt{(1-f^2z^2)}}$$

$$= \frac{B^2 (4 - fz)\partial z}{\sqrt{(B^2 + A^2)}\sqrt{(1+z^2)}(4-3fz)}$$

folglich, wenn $4 - 3fz = u$ gesetzt wird,

$$\partial v = \frac{-B^2}{9f\sqrt{(B^2 + A^2)}}\left[\frac{8\partial u}{u\sqrt{U}} + \frac{\partial u}{\sqrt{U}}\right], \text{ folglich}$$

$$v = \frac{B^2}{9f\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\frac{8}{\sqrt{(9f^2+16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2+16-4u+\sqrt{(9f^2+16)}\sqrt{U}}{u}\right.$$

$$\left. - \operatorname{logn}[u - 4 + \sqrt{U}]\right\} + \text{Const.}$$

$$\text{Const} = \frac{-B^2}{9f\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\frac{8}{\sqrt{(9f^2+16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2+3f\sqrt{(9f^2+16)}}{4} - \operatorname{logn} 3f\right\}$$

folglich

$$v = \frac{B^2}{9f\sqrt{(B^2+A^2)}}\left\{\frac{8}{\sqrt{(9f^2+16)}} \operatorname{logn} \frac{9f^2+16-4u+\sqrt{(9f^2+16)}\sqrt{U}}{\frac{1}{4}[9f^2+3f\sqrt{(9f^2+16)}]u}\right.$$

$$\left. - \operatorname{logn} \frac{u-4+\sqrt{U}}{3f}\right\}.$$

§. 141.

Wenn die Abscisse x gegen die Ordinate y sehr groß ist, so kann man sich zu Bestimmung der Ordinate des §. 119. (III) gefundenen Ausdrucks bedienen, nach welchem

$$\text{(I)} \quad y = \frac{Q}{6E^2}(3a^2x - x^3)$$

ist. Auch erhält man alsdann die größte Ordinate

$$\text{(II)} \quad u = \frac{a^3 Q}{3E^2}.$$

Um ungefähr zu übersehen innerhalb welcher Grenzen diese Ausdrücke noch mit zureichender Genauigkeit angewandt werden können, bestimme man hieraus die Lage der Tangente für die Abscisse x. Nun ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \operatorname{tgt} \psi$. Aber aus (I) wird $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Q}{2E^2}(a^2 - x^2)$, daher

(III) $\text{tgt}\,\psi = \frac{a^2 - x^2}{2E^2}\,Q$ und $\text{tgt}\,\beta = \frac{a^2 Q}{2 E^2} = \frac{3u}{2a}$.

Da nun die krumme Linie, welche der Gleichung (I) entspricht, für jeden Werth von x einen Krümmungshalbmesser $r = \frac{E^2}{xQ}$ hat (§. 112.), so folgt hieraus, daß diese krumme Linie für jeden Werth von x eben so gekrümmt ist, wie diejenige Kurve, welche durch die allgemeine Gleichung §. 134. (III) erhalten wird. Nun ist ferner für die Kurve, §. 134., wenn die Wand in welcher die Ruthe befestigt ist vertikal angenommen wird, $\alpha = 0$, daher §. 134. (II)

$$\sin\psi = \frac{a^2 - x^2}{2E^2}\,Q,$$

folglich können beide krumme Linien als einerlei angesehen werden, so weit man berechtigt ist $\text{tgt}\,\psi$ mit $\sin\psi$ als einerlei anzunehmen. Für einen Winkel von 9 Grad ist $\sin\psi = 0{,}1564345$ und $\text{tgt}\,\psi = 0{,}1583844$, also der Unterschied zwischen beiden 0,0019499, welcher in den meisten Fällen als unerheblich angesehen werden kann. Bestimmt man daher die Grenze, innerhalb welcher die Gleichung (I) noch mit Sicherheit angewandt werden soll, daß alsdann ψ, oder vielmehr β, nicht größer als 9 Grad ist, so erhält man

$$\frac{3u}{2a} = \text{tgt}\,\beta = 0{,}1583844,$$

also wird der größte Ordinate

$$u = 0{,}1055896\,.\,a.$$

So lange daher bei einer elastischen Ruthe die größte Ordinate u nicht größer als der zehnte Theil von der zugehörigen Abscisse a wird, kann man sich zur Bestimmung der Natur der elasti-

schen Linie, des vorstehenden Ausdrucks (I) mit Sicherheit bedienen.

§. 142.

Aufgabe. Den Inhalt der Fläche zu finden, welche von der elastischen Linie und ihren Koordinaten eingeschlossen wird.

Auflösung. Wenn F' den Inhalt der Fläche APM,
Taf. V. Figur 50., bezeichnet, so ist das Element derselben
Fig. 50. $\partial F' = y \partial x$, also $F' = \int y \partial x = x y - \int x \partial y$. Nach §. 134. (IV) ist aber

$$x \partial y = \frac{(A^2 - x^2) x \partial x}{\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]}}.$$

Daher wird, wenn man $B^4 - (A^2 - x^2)^2 = z^4$ setzt, $(A^2 - x^2) x \partial x = z^3 \partial z$, also

$$\int x \partial y = \int z \partial z = \tfrac{1}{2} z^2 + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $z^2 = \sqrt{(B^4 - A^4)}$ und das Integral verschwindet, daher ist $\text{Const} = -\tfrac{1}{2}\sqrt{(B^4 - A^4)}$, also $\int x \partial y = \tfrac{1}{2}\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^4 - A^4)}$, folglich die gesuchte Fläche

$$F' = x y - \tfrac{1}{2}\sqrt{[B^4 - (A^2 - x^2)^2]} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(B^4 - A^4)}.$$

§. 143.

Wäre die Richtung der Kraft Q auf die ursprüngliche Richtung A T' der elastischen Ruthe
Fig. 41. senkrecht, wie Figur 41., so ist der Winkel $\alpha = 0$, also $\sin \alpha = 0$, daher erhält man nach dem Vorhergehenden, weil $A^2 = a^2$ wird,

$$\text{(I)} \quad \sin \psi = \frac{a^2 - x^2}{2 E^2} Q.$$

$$\text{(II)} \quad \partial y = \frac{(a^2 - x^2) \partial x}{\sqrt{[B^4 - (a^2 - x^2)^2]}}.$$

(III) $\partial v = \frac{B^2 \partial x}{\sqrt{[B^4 - (a^2 - x^2)^2]}}$, wo $B^2 = \frac{2 E^2}{Q}$ ist.

(IV) $\sin \beta = \frac{a^2 Q}{2 E^2}$.

Wäre ϱ der Krümmungshalbmesser im Scheitel bei B, so erhält man §. 134. (I) weil $r = \frac{E^2}{x Q}$ ist,

(V) $\varrho = \frac{E^2}{a Q}$.

Mit Hülfe der Entwickelungen §. 138. bis 140. läßt sich, wenn x gegeben ist, die Ordinate y und der zugehörige Bogen v finden.

§. 144.

Unter der Voraussetzung im vorigen §. findet man die Fläche A P M $= F'$ nach §. 142.

$$F' = x y - \tfrac{1}{2} \sqrt{[B^4 - (a^2 - x^2)^2]} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(B^4 - a^4)}.$$

Für $x = AC = a$ werde $y = BC = u$ und die Fläche $ABC = F$, so erhält man

$$F = a u - \tfrac{1}{2} B^2 + \tfrac{1}{2} \sqrt{(B^4 - a^4)}.$$

§. 145.

Fällt die Linie A C, Figur 50., welche durch den Aufhängepunkt A senkrecht auf die Richtung der Kraft Q gezogen ist, unterhalb der Kurve A M B, so sind alle Ordinaten wie P M positiv; wenn hingegen ein Theil der Kurve unterhalb der Linie A C fällt, so sind die dazu gehörigen Ordinaten negativ. Liegt die ganze Kurve unterhalb A C, wie Figur 51., so sind alle Ordinaten wie P M negativ. Für diesen Fall kann man zu mehrerer Bequemlichkeit die bisherige Beziehung abändern. Taf. V. Fig. 50.

Es sei daher A M B, Figur 51., eine elastische Linie, die durchgängig unterhalb derjenigen Linie A C fällt, welche Fig. 51.

durch den Aufhängepunkt A senkrecht auf die Richtung der Kraft Q gezogen ist. Für irgend einen Punkt M und für B sei M K und B C′ senkrecht auf der Richtung A Q, welche als Abscissenaxe angenommen wird. Man setze
x A K = x, K M = y, B C′ = b, und wenn für die
y b Punkte M, B, A die Linien M T, B T′, A t′ die Tangenten sind, so ziehe man B C senkrecht auf A C und setze
φ α die Winkel M T C′ = φ, T′ B C′ = α, t′ A C = β, so
β erhält man ganz auf eine ähnliche Art wie §. 134., weil hier das Moment der Last = M K . Q = y Q ist

$$\text{(I)} \quad r = \frac{E^2}{y\,Q} = \frac{\partial v^3}{\partial y\, \partial^2 x},$$

wo ∂y constant genommen wird. Daher

$y\,Q = \frac{E^2\, \partial y\, \partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)^3}}$, oder mit $2\,\partial y$ multiplizirt, und weil y eine Funktion von x ist, $\partial x = q\, \partial y$ gesetzt, giebt wie §. 134.

$2\,Q\,y\,\partial y = \frac{2\,E^2\, \partial q}{\sqrt{(1+q^2)^3}}$. Es ist aber

$\int \frac{\partial q}{\sqrt{(1+q^2)^3}} = \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$, oder

$\int 2\,Q\,y\,\partial y = y^2 Q + \text{Const} = \frac{2\,E^2\, \partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}} = \frac{2\,E^2\, \partial x}{\partial v}$

Ferner ist $\partial x = \partial v \sin \varphi$, also $\frac{\partial x}{\partial v} = \sin \varphi$, daher $y^2 Q + \text{Const} = 2\,E^2 \sin \varphi$. Für $y = b$ wird $\varphi = \alpha$, also $\text{Const} = -\,b^2\,Q + 2\,E^2 \sin \alpha$, oder

$y^2 Q - b^2 Q + 2\,E^2 \sin \alpha = 2\,E^2 \sin \varphi = \frac{2\,E^2\, \partial x}{\partial v} = \frac{2\,E^2\, \partial x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$

folglich

$$\text{(II)} \quad \sin \varphi = \sin \alpha - \frac{(b^2 - y^2)\,Q}{2\,E^2}.$$

Weil $(y^2 Q - b^2 Q + 2\,E^2 \sin \alpha) \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 2\,E^2\, \partial x$ ist, so wird wie §. 134.

$$\partial x = \frac{(y^2 Q - b^2 Q + 2E^2 \sin\alpha)\,\partial y}{\sqrt{[4E^4 - (y^2 Q - b^2 Q + 2E^2 \sin\alpha)^2]}},$$ oder $\frac{2E^2 \sin\alpha - b^2 Q}{Q} = A^2$ und $\frac{4E^4}{Q^2} = B^4$ gesetzt, so wird

(III) $\partial x = \frac{(A^2 + y^2)\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}$.

(IV) $\partial v = \frac{B^2\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}$.

(V) $\sin\beta = \sin\alpha - \frac{b^2 Q}{2E^2}$.

§. 146.

Ist die Richtung der Kraft Q mit der ursprünglichen Richtung B T', Figur 51., der elastischen Ruthe parallel, so daß B T' in B C fällt, so ist $\alpha = 90$ Grad, also $\sin\alpha = 1$, daher Taf. V. Fig. 51.

(I) $\sin\varphi = \frac{2E^2 - (b^2 - y^2)\,Q}{2E^2}$,

(II) $A^2 = \frac{b^2 Q - 2E^2}{Q}$, und

(III) $\sin\beta = \frac{2E^2 - b^2 Q}{2E^2}$.

§. 147.

Wenn hingegen die verlängerte Richtung der Kraft Q in den Punkt B fällt, wo die elastische Ruthe befestigt ist, wie Figur 49., so wird $b = 0$, Fig. 49. daher §. 145. $A^2 = \frac{2E^2 \sin\alpha}{Q}$ und $B^2 = \frac{2E^2}{Q}$, also

(I) $r = \frac{E^2}{yQ}$.

(II) $\sin\varphi = \sin\alpha + \frac{y^2 Q}{2E^2}$.

(III) $\partial x = \frac{(A^2 + y^2)\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}$.

(IV) $\partial v = \frac{B^2\,\partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}}$.

(V) $\sin\beta = \sin\alpha$.

Nimmt man die Richtung der Kraft Q vertikal an, so folgt aus (V) daß die Tangente A t′ im Aufhängepunkt eben die Neigung gegen den Horizont hat, wie die ursprüngliche Richtung der Ruthe.

Für $\varphi = 90$ Grad läuft die Tangente MT mit der Axe AB parallel und entspricht der größten Ordinate. Setzt man daher $\sin\varphi = \sin 90^\circ = 1$, so erhält man aus (II) $1 = \sin\alpha + \frac{y^2 Q}{2 E^2}$, also $y^2 Q = 2 E^2 - 2 E^2 \sin\alpha$, oder wenn $FG = c$ die größte Ordinate bezeichnet

$$\text{(VI)} \quad FG = c = \pm \sqrt{\frac{2 E^2 - 2 E^2 \sin\alpha}{Q}}, \text{ oder}$$

$$c^2 = B^2 - A^2.$$

Man ziehe M M′ mit A B parallel, und M′ P′ auf A B senkrecht, so ist $M'P' = MP = y$, daher nach (I) der Schenkel G B bei M′ eben so gekrümmt, wie der Schenkel G A bei M. Da sich dies für jeden andern Punkt M′ eben so beweisen läßt, so folgt daraus, daß beide Schenkel GB und GA für gleiche Ordinaten y auch gleiche Krümmung haben. Eben so findet man aus (II), weil $P'M' = PM = y$ ist, daß die zum Punkte M′ gehörige Tangente, gleiche Neigung mit derjenigen hat, welche zum Punkte M gehört; da nun dies eben so für alle zusammengehörige Punkte M′, M, der Schenkel G B, G A gilt, so folgt daraus, daß beide einander gleich und ähnlich sind. Es ist daher auch $FA = FB$, also $AF = \frac{1}{2} AB$, oder wenn man $AB = a$ setzt, so ist die zur größten Ordinate $FG = c$ gehörige Abscisse $AF = \frac{1}{2} a$, daher muß auch die größte Ordinate c jedesmal in die Mitte der Axe $AB = a$ fallen.

§. 148.

Der allgemeine Ausdruck §. 138. kann ebenfalls dazu dienen, aus der Gleichung (III) des vorigen §. für jeden gegebenen Werth von y, die dazu gehörige Abscisse x zu erhalten. Will man nur allein für die größte Ordinate $FG = c$ die zugehörige Abscisse $AF = \frac{1}{2}a$ finden, so kann man durch nachstehendes Verfahren zu einem einfacheren Ausdruck zwischen a und c gelangen. Es ist

$$\partial x = \frac{(A^2+y^2)\,\partial y}{\sqrt{[B^4-(A^2+y^2)^2]}} = \frac{(A^2+y^2)\,\partial y}{\sqrt{(B^2-A^2-y^2)}\sqrt{(B^2+A^2+y^2)}}$$

Man setze $B^2 - A^2 - y^2 = z^2$, so ist $y^2 = B^2 - A^2 - z^2$, also $A^2 + y^2 = B^2 - z^2$ und $B^2 + A^2 + y^2 = 2B^2 - z^2$, daher

$$\partial x = \frac{(B^2 - z^2)\,\partial y}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}}.$$

Wird $\frac{1}{\sqrt{(2B^2 - z^2)}}$ nach dem binomischen Lehrsatze in eine Reihe aufgelößt, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{(2B^2-z^2)}} = \frac{1}{B\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{2B^2} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^4}{4B^4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^6}{8B^6} + \ldots\right] \text{ also}$$

$$\frac{1}{z\sqrt{(2B^2-z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{zB} + \frac{1}{2}\,\frac{z}{2B^3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^3}{4B^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^5}{8B^7} + \ldots\right]$$

oder mit $B^2 - z^2$ multiplizirt, giebt

$$\frac{B^2 - z^2}{z\sqrt{(2B^2-z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\begin{matrix}\frac{B}{z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{2B} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^3}{4B^3} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^5}{8B^5} + \ldots \\ -\quad \frac{z}{B} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{2B^3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^5}{4B^5} - \ldots\end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{B}{z} - \frac{3}{2}\,\frac{z}{2B} - \frac{1}{2}\,\frac{5}{4}\,\frac{z^3}{4B^3} - \frac{1.3}{2.4}\,\frac{7}{6}\,\frac{z^5}{8B^5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{9}{8}\,\frac{z^7}{16B^7} - \ldots\right]$$

Nach §. 147. (VI) ist $B^2 - A^2 = c^2$, also $z^2 = c^2 - y^2$. Aber P. A. S. 134.

$\int\frac{\partial y}{z} = \int\frac{\partial y}{\sqrt{(c^2 - y^2)}} = \text{Arc}\sin\frac{y}{c}$, wo keine Constante hinzukommt, weil das Integral für $y = 0$ ver-

schwindet. Für $y = c$ wird

$$\text{Arc sin} \frac{y}{c} = \text{Arc sin } 1 = \tfrac{1}{2}\pi, \text{ also}$$

$\int \frac{\partial y}{z} = \frac{1}{2}\pi$. Auf gleiche Art findet man

$$\int z \partial y = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\pi c^2$$

$$\int z^3 \partial y = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \tfrac{1}{2}\pi c^4$$

$\int z^5 \partial y = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2}\pi c^6$ u. s. w. Nun ist

$$\int \frac{(B^2 - z^2) \partial y}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{2}} \left[\frac{B}{z} - \tfrac{3}{2} \frac{z}{2B} - \tfrac{1}{2} \tfrac{5}{4} \frac{z^3}{4B^3} - \ldots \right]$$

Wird nun dies Integral so genommen, daß $y = c$ wird, so erhält man $\int \partial x = \frac{1}{2} a$, folglich ist, wenn die für $\int \frac{\partial y}{z}$, $\int z \partial y \ldots$ gefundenen Werthe in die vorstehende Reihe gesetzt werden,

$$\tfrac{1}{2} a = \frac{\pi B}{2\sqrt{2}} \left[1 - \tfrac{3}{2} \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{2B^2} - \frac{1.5}{2.4} \cdot \frac{1.3}{2.4} \frac{c^4}{4B^4} - \frac{1.3.7}{2.4.6} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{c^6}{8B^6} - \ldots \right]$$

oder man findet die zur größten Ordinate c gehörige doppelte Abscisse

$$a = \frac{\pi B}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{2^2} \cdot \tfrac{3}{2} \frac{c^2}{B^2} - \frac{1^2 . 3}{2^2 . 4^2} \cdot \tfrac{5}{4} \frac{c^4}{B^4} - \frac{1^2 . 3^2 . 5}{2^2 . 4^2 . 6^2} \cdot \tfrac{7}{8} \frac{c^6}{B^6} - \frac{1^2 . 3^2 . 5^2 . 7}{2^2 . 4^2 . 6^2 . 8^2} \cdot \tfrac{9}{16} \frac{c^8}{B^8} - \ldots \right]$$

oder auch

$$a = \frac{\pi B}{\sqrt{2}} \left[1 - \tfrac{3}{8} \frac{c^2}{B^2} - \tfrac{15}{256} \frac{c^4}{B^4} - \tfrac{35}{2048} \frac{c^6}{B^6} - \ldots \right]$$

Je größer nun B gegen c ist, desto genauer kann auch mittelst dieser Reihe der Werth a gefunden werden.

§. 149.

Wollte man, wenn a, c und Q gegeben sind, daraus den Werth für die beständige Größe E^2 durch Näherung unter der Voraussetzung finden, daß die ersten drei bis vier Glieder der für a gefundenen Reihe einen zureichend genauen

genauen Werth geben, wenn die übrigen Glieder dieser Reihe nicht genau in Rechnung gebracht werden, so kann man

$$1 - \frac{3}{8}\frac{c^2}{B^2} - \frac{15}{256}\frac{c^4}{B^4} - \frac{35}{2048}\frac{c^6}{B^6} - \ldots$$

in einen Kettenbruch auflösen, so findet man als Näherungswerth für diese Reihe

$$\frac{32B^2 - 17c^2}{32B^2 - 5c^2} = 1 - \frac{3}{8}\frac{c^2}{B^2} - \frac{15}{256}\frac{c^4}{B^4} - \frac{75}{8192}\frac{c^6}{B^6} - \ldots$$

folglich wird

$$a = \frac{\pi B}{\sqrt{2}} \cdot \frac{32B^2 - 17c^2}{32B^2 - 5c^2}.$$

Nun ist §. 147. $B = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{Q}}$. Diesen Werth in die vorstehende Gleichung gesetzt und nach den Potenzen von E geordnet, giebt

$$E^3 - \frac{a\sqrt{Q}}{\pi}E^2 - \frac{17c^2Q}{64}E + \frac{5ac^2Q\sqrt{Q}}{64\pi} = 0,$$

so daß man durch Auflösung dieser kubischen Gleichung den Werth für E finden kann.

Ist c gegen a sehr klein, so findet man nach §. 132. $E = \frac{a\sqrt{Q}}{\pi}$, und unter dieser Voraussetzung ist $\frac{a\sqrt{Q}}{\pi}$ ein sehr naher Werth für E. Wenn nun in einer kubischen Gleichung $t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0$, y ein naher Werth für t ist, so erhält man (P. A. 1. Bd. S. 382.) nahe genug

$$t = \frac{2y^3 + \alpha y^2 - \gamma}{3y^2 + 2\alpha y + \beta}.$$

Hienach findet man

$$E = \frac{a(64a^2 - 5\pi^2c^2)\sqrt{Q}}{\pi(64a^2 - 17\pi^2c^2)} \text{ oder}$$

$$E^2 = \frac{a^2(64a^2 - 5\pi^2c^2)^2 Q}{\pi^2(64a^2 - 17\pi^2c^2)^2}.$$

§. 150.

Mit Hülfe der Entwickelungen §. 148. kann ebenfalls die ganze Länge A G B, Figur 49., von der krummen Linie mittelst einer Reihe gefunden werden, wenn $AB = a$, $FG = c$ und die Kraft Q bekannt ist. Denn nach §. 147. (IV) ist der Bogen A M, oder

$$v = \int \frac{B^2 \partial y}{\sqrt{[B^4 - (A^2 + y^2)^2]}} = \int \frac{B^2 \partial y}{z \sqrt{(2B^2 - z^2)}}.$$

Man setze den ganzen Bogen $AGB = V$, also den halben oder $AG = \frac{1}{2} V$. Wird nun für den Fall integrirt, daß $y = c$ wird, so muß $v = \frac{1}{2} V$ werden. Alsdann ist aber §. 148.

$$\frac{B^2}{z\sqrt{(2B^2 - z^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{B}{z} + \frac{1}{2}\frac{z}{2B} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{z^3}{4B^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{z^5}{8B^5} + \ldots\right]$$

$$\int \frac{\partial y}{z} = \frac{1}{2}\pi; \int z \partial y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi c^2; \int z^3 \partial y = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2}\pi c^4;$$ u. s. w.

Daher ist, wenn diese Werthe in die vorstehende Reihe gesetzt werden,

$$\frac{1}{2} V = \frac{\pi B}{2\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}\frac{c^2}{2B^2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \cdot \frac{c^4}{4B^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \cdot \frac{c^6}{8B^6} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8^2} \cdot \frac{c^8}{16B^8} + \ldots\right]$$

oder auch

$$V = \frac{\pi B}{\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{8}\frac{c^2}{B^2} + \frac{9}{256}\frac{c^4}{B^4} + \frac{25}{2048}\frac{c^6}{B^6} + \frac{1225}{262144}\frac{c^8}{B^8} + \ldots\right]$$

Für diese Reihe ist

$$\frac{32B^2 - 5c^2}{32B^2 - 9c^2} = 1 + \frac{1}{8}\frac{c^2}{B^2} + \frac{9}{256}\frac{c^4}{B^4} + \frac{81}{8192}\frac{c^6}{B^6} + \ldots$$

ein Näherungswerth, daher erhält man beinahe

$$V = \frac{\pi B}{\sqrt{2}} \cdot \frac{32B^2 - 5c^2}{32B^2 - 9c^2}.$$

§. 151.

Die erste Veranlassung zur Untersuchung der elastischen Linie gab Galilei in der bereits angeführten Schrift: Discorsi e Demonstrazioni matematiche etc., nur

hatte er die Meinung, daß die elastische Linie eine Parabel sei. Jacob **Bernoulli** war es vorbehalten, die Eigenschaften der elastischen Linie genauer zu bestimmen. Hieher gehören folgende Abhandlungen desselben:

Curvatura Laminae Elasticae. Acta Erud. Lips. 1694: Jun. p. 262. (Jac. Bern. Opera. T. I. Genevae 1744. p. 576.)

Explicationes, Annotationes et Additiones. Acta Erud. Lips. 1695. Dec. p. 537. (J. B. Oper. T. I. p. 639.).

Elf Jahre später verbesserte Jacob **Bernoulli** seine frühern Abhandlungen, indem er zugleich seine Grundsätze über den Widerstand fester Körper bekannt machte. Der Aufsatz führt den Titel:

Véritable hypothèse de la résistance des Solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort. Mém. de l'acad. de Paris, année 1705. p. 230. éd. Bat. (J. B. Opera, T. II. p. 976.).

Die vollständigsten Untersuchungen über die Eigenschaften der elastischen Linien verdankt man L. **Euler**. Unter mehrern Abhandlungen desselben können vorzüglich folgende hieher gerechnet werden:

Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes. Auct. Leonh. *Eulero*. Lausannae et Genevae 1744. — Additamentum I. De Curvis Elasticis. p. 245—310.

L. *Euler* solutio problematis de invenienda curva, quam format lamina utcunque elastica in singulis punctis a potentiis quibuscunque sollicitata. Comment. Acad. Petropol. Tom. III. ad An. 1728.

L. *Euler* Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum. Novi Comment. Ac. Petrop. Tom. XV. pro Anno 1770. p. 381—413.

——— De gemina methodo tam aequilibrium quam motum corporum flexibilium determinandi et utriusque egregio consensu. Novi Comment. Ac. Petropol. Tom. XX. pro Anno 1775. p. 286—303.

Nachtrag,

welcher einige Näherungsausdrücke für trigonometrische Linien enthält.

§. 152.

Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für den Sinus zu finden, welcher einem gegebenen Kreisbogen entspricht.

Auflösung. Der Sinus, welcher für den Halbmesser $= 1$ einem gegebenen Kreisbogen φ zugehört, sei $= x$, also $x = \sin \text{Arc}\, \varphi$, oder kürzer $x = \sin \varphi$, so ist, wenn φ in $\sin \varphi$ den Winkel bezeichnet, welcher zum Bogen φ gehört, und wenn φ als Faktor vorkommt, einen Bogen für den Halbmesser 1 (P. A. 1. Bd. S. 539.)

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1.2.....7} + \ldots \text{ oder}$$

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^7}{5040} + \frac{\varphi^9}{362880} - \ldots$$

Verwandelt man diese Reihe in einen Kettenbruch, so wird

$$\sin \varphi = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi} + \cfrac{1}{\cfrac{6}{\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{10}{7\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{686}{11\varphi} + \ldots}}}}$$

und man erhält hieraus als Näherungswerthe

$$\text{(I)} \quad \sin \varphi = \frac{6\varphi}{6 + \varphi^2}$$

$$\text{(II)} \quad \sin \varphi = \frac{(60 - 7\varphi^2)\varphi}{60 + 3\varphi^2}$$

u. s. w., wo jeder folgende Ausdruck den Werth für x genauer, aber auch mittelst einer weitläuftigeren Formel angiebt. Je kleiner φ ist, desto genauer findet man x; auch lassen sich die vorstehenden beiden Ausdrücke nur innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und Winkel $\varphi = 90$ Grad gebrauchen, weil für größere Winkel ansehnliche Abweichungen entstehen. Für den Winkel $\varphi = 90°$ ist $\sin \varphi = 1$. Der Ausdruck (I) giebt alsdann $\sin \varphi = 1{,}11306$, und der zweite Ausdruck $\sin \varphi = 0{,}99948$.

Wollte man dem ersten Ausdruck eine solche Gestalt geben, daß derselbe genau $\sin \varphi$ oder $x = 1$ giebt, wenn der Bogen $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder der zugehörige Winkel 90 Grad wird, so setze man

$$\sin \varphi = \frac{\alpha \varphi}{\beta + \varphi^2},$$

wo α und β solche Zahlen bedeuten, welche noch näher zu bestimmen sind. Nun ist für einen Winkel von 90 Grad $\sin \varphi = 1$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, also

$$1 = \frac{\frac{1}{2}\pi\alpha}{\beta + \frac{1}{4}\pi^2},$$

und für einen Winkel von 45 Grad ist $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, daher

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{4}\pi\alpha}{\beta + \frac{1}{16}\pi^2}.$$

Entwickelt man aus diesen beiden Gleichungen α und β, so wird

$$\alpha = \frac{3\pi}{4(2 - \sqrt{2})} \text{ und } \beta = \frac{(2\sqrt{2} - 1)\pi^2}{8(2 - \sqrt{2})},$$

daher erhält man für den ersten Quadranten

$$\text{(III)} \quad \sin\varphi = \frac{6\pi\varphi}{(2\sqrt{2}-1)\pi^2 + 8(2-\sqrt{2})\varphi^2}.$$

§. 153.

Aufgabe. Für den Kreisbogen, welcher einem gegebenen Sinus entspricht, einen Näherungsausdruck zu finden.

Auflösung. Der Kreisbogen, welcher bei einem Halbmesser $= 1$ zum Sinus x gehört, sei φ, so ist $\sin\varphi = x$ und $\text{Arc}\sin x = \varphi$, also (P. A. S. 312.)

$$\text{Arc}\sin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots \text{ oder}$$

$$\text{Arc}\sin x = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 + \ldots$$

Wird diese Reihe in einen Kettenbruch verwandelt, so ist

$$\text{Arc}\sin x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} + \cfrac{1}{-\cfrac{6}{x} + \cfrac{1}{\cfrac{10}{17\,x} + \cfrac{1}{-\cfrac{4046}{549\,x} + \ldots}}}}$$

Hiedurch erhält man folgende Näherungswerthe:

$$\text{(I)} \quad \text{Arc}\sin x = \frac{6x}{6 - x^2}$$

$$\text{(II)} \quad \text{Arc}\sin x = \frac{(60 - 17x^2)\,x}{60 - 27x^2}$$

$$\text{(III)} \quad \text{Arc}\sin x = \frac{40\,(6069 - 2296\,x^2)\,x}{3\,(80920 - 55080\,x^2 + 3111\,x^4)}$$

u. s. w.

Für $x = 0$ wird $\text{Arc}\sin x = 0$, wie erfordert wird; allein für $x = 1$ muß $\text{Arc}\sin x = \frac{1}{2}\pi = 1{,}5$

werden. Die vorstehenden Ausdrücke geben aber für diesen Fall,

nach (I); $\text{Arc sin } x = 1,2000$

nach (II); $\text{Arc sin } x = 1,3030$

nach (III); $\text{Arc sin } x = 1,7376.$

Will man dem zweiten Ausdruck eine solche Gestalt geben, daß er vorzüglich nur mit dem ersten Quadranten in Uebereinstimmung gebracht wird, so setze man

$$\text{Arc sin } x = \frac{\alpha x - \beta x^3}{\gamma - x^2}.$$

Nun ist für einen Bogen von 90 Grad $x = 1$ und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, daher

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{\alpha - \beta}{\gamma - 1}.$$

Für einen Winkel von 60 Grad ist $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\varphi = \frac{1}{3}\pi$, also

$$\tfrac{1}{3}\pi = \frac{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{3} - \frac{3}{8}\beta\sqrt{3}}{\gamma - \frac{3}{4}},$$

und für einen Winkel von 30 Grad wird $x = \frac{1}{2}$ und $\varphi = \frac{1}{6}\pi$, daher

$$\tfrac{1}{6}\pi = \frac{\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{8}\beta}{\gamma - \frac{1}{4}}.$$

Aus der Verbindung dieser drei Gleichungen erhält man

$$\alpha = 1,23471$$
$$\beta = 0,89718$$
$$\gamma = 1,21488$$

daher ist für den ersten Quadranten

$$\text{(IV) Arc sin } \varphi = \frac{(123471 - 89718\, x^2)\, x}{121488 - 100000\, x^2}.$$

§. 154.

Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für den Cosinus zu finden, welcher einem gegebenen Kreisbogen entspricht.

Auflösung. Mit Rücksicht auf die Bemerkungen §. 152. sei der zum Bogen φ gehörige Cosinus $= \cos\varphi$, so erhält man (P. A. 1. B. S. 540.)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{1.2} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \frac{\varphi^6}{1.2\ldots.6} + \frac{\varphi^8}{1.2\ldots.8} - \ldots. \text{ oder}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \frac{\varphi^6}{720} + \frac{\varphi^8}{40320} - \frac{\varphi^{10}}{3628800} + \ldots.$$

Diese Reihe in einen Kettenbruch verwandelt giebt

$$\cos\varphi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{2}{\varphi^2} + \cfrac{1}{-\cfrac{6}{5} + \cfrac{1}{-\cfrac{250}{3\varphi^2} + \ldots}}}}$$

und man erhält als Näherungswerthe

$$\text{(I)}\quad \cos\varphi = \frac{2}{2 + \varphi^2}$$

$$\text{(II)}\quad \cos\varphi = \frac{12 - 5\varphi^2}{12 + \varphi^2}$$

$$\text{(III)}\quad \cos\varphi = \frac{600 - 244\varphi^2}{3\varphi^4 + 56\varphi^2 + 600} \text{ u. s. w.}$$

Sämmtliche Ausdrücke geben für $\varphi = 0$; $\cos\varphi = 1$, wie erfordert wird. Für einen Bogen von 90 Grad wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; man erhält alsdann

nach (I), $\cos\varphi = + 0,4477$

nach (II), $\cos\varphi = - 0,0233$

nach (III), $\cos\varphi = - 0,0027$.

Hieraus folgt, daß der erste Ausdruck innerhalb der Grenzen $\varphi = 0$ und 90 Grad unbrauchbar ist, daß man aber für Bogen, welche in den ersten Quadranten fal-

den zweiten oder mit mehrerer Genauigkeit den dritten Ausdruck beibehalten kann.

Verlangt man, daß nach dem zweiten Ausdruck für einen Winkel von 90 Grad der Cosinus genau $= 0$ werden soll, so sei

$$\cos \varphi = \frac{\alpha - \beta \varphi^2}{\alpha + \varphi^2}.$$

Für einen Winkel von 60 Grad ist $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ und $\cos \varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, also

$$\frac{1}{2} = \frac{\alpha - \frac{1}{9}\pi^2 \beta}{\alpha + \frac{1}{9}\pi^2},$$

und für einen Winkel von 90 Grad ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ und $\cos \varphi = 0$, daher

$$0 = \frac{\alpha - \frac{1}{4}\pi^2 \beta}{\alpha + \frac{1}{4}\pi^2} \text{ oder } \alpha = \frac{1}{4}\pi^2 \beta.$$

Hieraus findet man

$$\alpha = \pi^2 \text{ und } \beta = 4,$$

daher ist für den ersten Quadranten

$$\text{(IV)} \quad \cos \varphi = \frac{\pi^2 - 4\varphi^2}{\pi^2 + \varphi^2}.$$

Um die Genauigkeit dieses Ausdrucks zu übersehen, dient folgende Tafel:

Grade des Bogens φ	φ	Wahre Werthe für $\cos \varphi$.	Berechnete Werthe für $\cos \varphi$.
0°	0,0000	1,0000	1,0000
15°	0,2618	0,9659	0,9655
30°	0,5236	0,8660	0,8648
45°	0,7854	0,7071	0,7059
60°	1,0472	0,5000	0,5000
75°	1,3090	0,2588	0,2604
90°	1,5708	0,0000	0,0000

§. 155.

Aufgabe: Für den Kreisbogen, welcher einem gegebenen Cosinus entspricht, einen Näherungsausdruck zu finden.

Auflösung. Der Kreisbogen, dessen Cosinus $= x$ ist, sei φ, so ist $\cos\varphi = x$ und $\text{Arc}\cos x = \varphi$. Weil aber $\text{Arc}\cos x = \frac{1}{2}\pi - \text{Arc}\sin x$, so findet man nach §. 153. folgende Näherungswerthe

$$\text{(I) Arc}\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{6x}{6 - x^2}$$

$$\text{(II) Arc}\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{(60 - 17x^2)x}{60 - 27x^2}$$

u. s. w.

Soll der erste Ausdruck nur innerhalb der Grenzen $x = 0$ bis $x = 1$ angewandt werden, so setze man

$$\text{Arc}\cos x = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{\alpha x}{\beta - x^2},$$

alsdann ist für $x = 1$ der Bogen φ oder $\text{Arc}\cos x = 0$, daher

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{\alpha}{\beta - 1},$$

und bei einem Winkel von 45 Grad ist $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, wenn $x = 0{,}7071068$ wird, man erhält daher auch

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{0{,}7071068\,\alpha}{\beta - 0{,}5}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man

$\alpha = 1{,}896$ und $\beta = 2{,}207$, daher

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1{,}896\,x}{2{,}207 - x^2}, \text{ oder}$$

$$\text{(III) Arc}\cos x = \frac{3{,}468 - 1{,}896\,x - 1{,}571\,x^2}{2{,}207 - x^2}.$$

Für verschiedene Werthe von x erhält man nachstehende Tafel zur Vergleichung mit den wahren Werthen:

Grade des Bogens φ.	$x = \cos\varphi$.	Wahre Werthe für Arc cos x.	Berechnete Werthe für Arc cos x.
90°	0,0000	1,5708	1,5708
75°	0,2588	1,3090	1,3415
60°	0,5000	1,0472	1,0864
45°	0,7071	0,7854	0,7858
30°	0,8660	0,5240	0,4439
0	1,0000	0,0000	0,0000

§. 156.

Aufgabe. Einen Näherungswerth für das Quadrat eines Kreisbogens zu finden, welcher einem gegebenen Cosinus zugehört.

Auflösung. Es sei φ der Bogen, zu welchem für den Halbmesser 1 der Cosinus $= x$ gehört, so ist $\cos\varphi = x$ also $\varphi = \text{Arc} \cos x$. Aber (P. A. S. 313.)

$$\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - x - \tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{3}{40}x^5 - \tfrac{5}{112}x^7 - \tfrac{35}{1152}x^9 - \ldots$$

daher wenn man die Reihe quadrirt

$$\varphi^2 = \tfrac{1}{4}\pi^2 + \left\{ \begin{matrix} -\pi\left(x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \ldots\right) \\ + x^2 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{8}{45}x^6 + \tfrac{4}{35}x^8 + \ldots \end{matrix} \right\}$$

Verwandelt man diese Reihe in einen Kettenbruch, so ist

$$\varphi^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2 = \cfrac{1}{-\cfrac{1}{\pi x} + \cfrac{1}{-\pi^2 + \cfrac{1}{\cfrac{6}{\pi(6-\pi^2)x} + \cfrac{1}{\cfrac{(6-\pi^2)^2}{\pi^2-12} + \ldots}}}}$$

und man erhält als Näherungswerthe

(I) $\varphi^2 = \frac{1}{4}\pi^2 - \pi x.$

(II) $\varphi^2 = \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{\pi^2 x}{\pi + x}.$

(III) $\varphi^2 = \frac{1}{4}\pi^2 - \frac{6\pi x + (\pi^2 - 6)x^2}{6 + \pi x}.$

$$= \frac{6\pi^2 - \pi(24 - \pi^2)x - 4(\pi^2 - 6)x^2}{4(6 + \pi x)}.$$

$$= \frac{14{,}8044 - 11{,}098\,x - 3{,}8696\,x^2}{6 + \pi x}.$$

u. s. w.

Um die Uebereinstimmung des letzten Ausdrucks mit dem wahren Werthe von φ^2 für den ersten Quadranten zu übersehen, dient folgende Zusammenstellung.

Grade des Bogens φ	$x = \cos\varphi$	Wahre Werthe für φ^2	Berechnete Werthe für φ^2
90°	0, 0000	2, 4674	2, 4674
60°	0, 5000	1, 0966	1, 0947
45°	0, 7071	0, 6168	0, 6110
30°	0, 8660	0, 2742	0, 2627
0°	1, 0000	0, 0000	— 0, 0178

Damit der für φ^2 gefundene Ausdruck für $x = 1$ genau $\varphi^2 = 0$ gebe, kann man mit demselben noch nachstehende Abänderung vornehmen, indem man die Coeffizienten der beiden letzten Glieder des Zählers als unbestimmt annimmt. Alsdann ist

$$\varphi^2 = \frac{14{,}8044 - \alpha x - \beta x^2}{6 + \pi x}.$$

Für $x = 1$ erhält man $\varphi^2 = 0$, also

$$0 = \frac{14,8044 - \alpha - \beta}{6 + \pi}, \text{ oder } \alpha + \beta = 14,8044.$$

Ferner ist für $x = 0,866$; $\varphi^2 = 0,2742$, daher

$$0,2742 = \frac{14,8044 - 0,866\,\alpha - 0,866^2\,\beta}{6 + 0,866\,\pi}.$$

Aus der Verbindung beider Gleichungen erhält man

$$\alpha = 11,1532 \text{ und } \beta = 3,6512,$$

folglich ist der gesuchte Werth für $(\text{Arc} \cos x)^2$, oder

$$\text{(IV)} \quad \varphi^2 = \frac{14,8004 - 11,1532\,x - 3,6512\,x^2}{6 + \pi x}.$$

Berechnet man nach diesem Ausdruck verschiedene Werthe für φ^2, so entsteht folgende Vergleichung

Grade des Bogens φ	$x = \cos \varphi$	Wahre Werthe für φ^2	Berechnete Werthe für φ^2
90°	0,0000	2,4674	2,4674
60°	0,5000	1,0966	1,0982
45°	0,7071	0,6168	0,6195
30°	0,8660	0,2742	0,2742
0°	1,0000	0,0000	0,0000

§. 157.

Aufgabe. Einen Näherungsausdruck für die Tangente eines gegebenen Kreisbogens zu finden.

Auflösung. Der gegebene Kreisbogen für den Halbmesser = 1 sei φ, so ist seine Tangente = $\text{tgt}\,\varphi$, und man hat (P. A. 1. B. S. 541.)

$$\text{tgt}\,\varphi = \varphi + \frac{2}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{2^4}{1.2.3.4.5}\varphi^5 + \frac{2^4.17}{1\ldots\ldots7}\varphi^7 + \frac{2^8.31}{1\ldots\ldots9}\varphi^9 + \ldots$$

oder

$$\mathrm{tgt}\,\varphi = \varphi + \tfrac{1}{3}\varphi^3 + \tfrac{2}{15}\varphi^5 + \tfrac{17}{315}\varphi^7 + \tfrac{64}{2835}\varphi^9 + \ldots$$

Diese Reihe in einen Kettenbruch verwandelt, giebt

$$\mathrm{tgt}\,\varphi = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{3}{\varphi} + \cfrac{1}{\cfrac{5}{\varphi} + \cfrac{1}{-\cfrac{7}{\varphi} + \ldots}}}}$$

woraus man folgende Näherungswerthe erhält:

(I) $\mathrm{tgt}\,\varphi = \dfrac{3\varphi}{3 - \varphi^2}$.

(II) $\mathrm{tgt}\,\varphi = \dfrac{(15 - \varphi^2)\,\varphi}{15 - 6\varphi^2}$.

(III) $\mathrm{tgt}\,\varphi = \dfrac{5\,(21 - 2\varphi^2)\,\varphi}{105 - 45\varphi^2 + \varphi^4}$ u. s. w.

Soll der erste Ausdruck nur für den ersten Quadranten gelten, so setze man

$$\mathrm{tgt}\,\varphi = \frac{\alpha\varphi}{\beta - \varphi^2}.$$

Für einen Winkel von 90 Grad wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, und $\mathrm{tgt}\,\varphi = \infty$. Damit diese Bedingung erfüllt werde, muß der Nenner $\beta - \varphi^2$ verschwinden, also $\beta = \frac{1}{4}\pi^2$ seyn. Man hat also $\mathrm{tgt}\,\varphi = \dfrac{\alpha\varphi}{\frac{1}{4}\pi^2 - \varphi^2}$.

Für einen Winkel von 45 Grad ist $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ und $\mathrm{tgt}\,\varphi = 1$, also

$$1 = \frac{\frac{1}{4}\pi\alpha}{\frac{1}{4}\pi^2 - \frac{1}{16}\pi^2}, \text{ oder } \alpha = \tfrac{3}{4}\pi.$$

Hiedurch erhält man

(IV) $\mathrm{tgt}\,\varphi = \dfrac{3\pi\varphi}{\pi^2 - 4\varphi^2}$.

Welche Genauigkeit von diesem Ausdruck für den ersten Quadranten zu erwarten ist, übersieht man aus nachstehender Tafel:

Grade des Bogens φ	Wahre Werthe für tgt φ	Berechnete Werthe für tgt φ
0°	0,00000	0,00000
15°	0,26795	0,25714
30°	0,57735	0,56250
45°	1,00000	1,00000
60°	1,73205	1,80000
75°	3,73205	4,09090
90°	∞	∞

Verlangt man einen Ausdruck welcher die Werthe tgt φ genauer angiebt, so setze man nach (II)

$$\text{tgt}\,\varphi = \frac{(\beta - \varphi^2)\varphi}{3(\frac{1}{2}\pi^2 - 2\varphi^2)}.$$

Für einen Winkel von 45 Grad ist $\varphi = \frac{1}{4}\pi$, und tgt $\varphi = 1$, also

$$1 = \frac{(\beta - \frac{1}{16}\pi^2)\frac{1}{4}\pi}{3(\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{8}\pi^2)},$$ und hieraus

$$\beta = \frac{\pi^2 + 72\pi}{16} = 14,754.$$

Hiernach erhält man

$$\text{(V)} \quad \text{tgt}\,\varphi = \frac{(14,754 - \varphi^2)\varphi}{6(2,9674 - \varphi^2)}.$$

E n d e.

Druckfehler im ersten Bande.

Seite 216. Zeile 7. v. o. statt $\frac{b(2P + 2M) + cN}{b(2P + 2M + R) + cN}$

lese man $\frac{b(2P + 2M) + cN}{b[b(2P + 2M + R) + cN]}$.

